Sujets de projets tutorés L3 parcours mathématiques fondamentales

2024-2025

Table des matières

Sujet 1

Le paradoxe de Banach-Tarski

Sujet proposé par Laurent Bessières

laurent.bessieres@math.u-bordeaux.fr

Sujet déjà pris

Le théorème de Banach-Tarski (1924) affirme qu'il est possible de découper une boule unité de $\mathbf{R}^3$ en un nombre fini de morceaux et, après les avoir déplacé par des isométries (affines) de $\mathbf{R}^3$, de les réassembler de manière à former *deux* boules unités disjointes.

Cet énoncé se généralise à $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, mais pas au plan $\mathbf{R}^2$. Le « paradoxe » disparaît une fois conçu que les morceaux ne sont pas mesurables. La construction utilise de manière cruciale l'axiome du choix et l'existence d'un groupe libre non abélien d'isométries de $\mathbf{R}^3$.
Pré-requis : Notions élémentaires de théorie des groupes, géométrie vectorielle.

Références

[1] Stan Wagon, *The Banach-Tarski paradox*, Cambridge University Press.

[2] Karl Stromberg, *The Banach-Tarski paradox*, dans The American Mathematical Monthly, Vol. 86, No. 3 (Mar., 1979), pp. 151-161.

Sujet 2

Couplage et distance en Variation totale

Sujet proposé par Michel Bonnefont

Michel.Bonnefont@math.u-bordeaux.fr

Le but de ce sujet est de s'intéresser à la distance en variation totale et aux couplages stochastiques. On s'appuiera sur les notes de cours : Probability Theory : The Coupling Method écrites par Frank den Hollander. On s'intéressera aux exemples de la marche aléatoire (chapitre 3) et de l'approximation binomiale Poisson (chapitre 5).

Références

[1] Frank den Hollander, *Probability Theory : The Coupling Method*, notes de cours.

Sujet 3

Groupes simples de petit ordre

Sujet proposé par Olivier Brinon

olivier.brinon@math.u-bordeaux.fr

Sujet déjà pris

Si G est un groupe fini, il est facile de montrer qu'il existe une suite de sous-groupes

$$\{e\} \leq N_1 \leq N_2 \leq \cdots \leq N_r = G$$

telle que N_{i-1} soit distingué dans N_i et N_i/N_{i-1} soit simple pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$: les groupes finis sont donc « extensions » successives de groupes simples, qui apparaîssent comme les « briques » élémentaires des groupes finis. On sait bien sûr que les groupes simples abéliens sont cycliques d'ordre premier : on aimerait « comprendre » les groupes simples non abéliens. On en connaît déjà une infinité : les groupes alternés $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geq 5$. La question de la classification générale des groupes finis simples est un problème très difficile (qui n'a été complètement résolu que relativement récemment). Le but du TER est de comprendre pourquoi les seuls ordres possibles pour un groupe simple non abélien d'ordre ≤ 1000 sont $60, 168, 360, 504$ et 660. Pour cela, on démontrera une série de petits lemmes qui permettent de montrer la non simplicité de groupes pour beaucoup d'ordres, ainsi que la simplicité des groupes $\mathsf{PSL}(n, \mathbf{F}_q)$ (sauf si $n =$ et $q \in \{2, 3\}$). Chemin faisant, on pourra éventuellement prouver des isomorphismes exceptionnels, voire des résultats d'unicité à isomorphisme près.
Pré-requis : Structures algébriques 2.

Références

[1] I. M. Isaacs, *Finite group theory*, Graduate studies in mathematics **92**, AMS.

[2] D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses.

[3] J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, Graduate texts in mathematics **148**, Springer.

Sujet 4

Équations différentielles : le point de vue corporel

Sujet proposé par Olivier Brinon

olivier.brinon@math.u-bordeaux.fr

Sujet déjà pris

La théorie des extensions de corps permet facilement de montrer que certaines constructions géométriques (trisection d'un angle, quadrature du cercle) sont impossibles en utilisant seulement une règle (non graduée) et un compas. De façon analogue, il est possible de montrer que la fonction $x \mapsto \exp(x^2)$ n'admet pas de primitive s'exprimant avec « les fonctions élémentaires ». On travaille pour cela avec des extensions de corps différentiels (*i.e.* des corps munis d'une dérivation). Le but du TER est de présenter les rudiments de cette théorie et de démontrer le résulté mentionné ci-dessus.
Pré-requis : Structures algébriques 2.

Références

[1] van der Put, Singer, *Galois theory of linear differential equations*, Springer (2003).

[2] Sujet du concours d'entrée aux Écoles normales supérieures (Lyon-Cachan) 1995.

Sujet 5

Itération de projections

Sujet proposé par Philippe Jaming

Philippe.Jaming@math.u-bordeaux.fr

La projection orthogonale a été introduite dans le cadre des espaces euclidiens en cours de L2 et son extension à la dimension infinie est un objet central du cours sur les espaces de Hilbert (et sera introduit dès les premières semaines de ce cours).

L'objet de ce TER est de considérer des itérations de projections orthogonales. Par exemple, si P_E et P_F sont les projections orthogonales sur deux sous-espaces (fermés dans un Hilbert H), on peut montrer que $(P_E P_F)^n$ converge vers $P_{E\cap F}$ et plus généralement, si P_{E_i} est la projection orthogonales sur E_i, alors $(P_{E_1}P_{E_2}\cdots P_{E_m})^n$ converge vers la projection orthogonale sur $A = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n$. En d'autres termes, si $x_0 \in H$ et $x_{n+1} = P_{E_1}P_{E_2}\cdots P_{E_m}x_n$ alors $x_n \to P_A x_0$. (Cela conduit à l'algorithme de Kaczmarz de résolution des systèmes linéaires qui est le premier objectif de ce travail.) On note alors que l'ordre dans lequel on liste ces projections n'a aucune influence. On peut alors se poser la question de comprendre ce qui se passe lorsqu'on change cet ordre à chaque itération. Le cas de la dimension infinie est ici très différent de celui de la dimension finie.

Sujet 6

Le théorème de Schur-Zassenhaus

Sujet proposé par Florent Jouve

florent.jouve@math.u-bordeaux.fr

Sujet déjà pris

Étant donné un groupe fini G et un sous-groupe distingué N de G, une question naturelle est de savoir si l'on peut « reconstruire » G à partir de N et de G/N. En général, on sait que ce n'est pas possible. En revanche si $|N|$ et $|G/N|$ sont premiers entre eux, alors le théorème de Schur-Zassenhaus fournit des éléments de réponse intéressants au problème. Ce résultat peut s'énoncer ainsi :

Théorème. (Schur-Zassenhaus) *Soit G un groupe fini d'ordre nm où n, m sont des entiers tels que* $\mathrm{pgcd}(n, m) = 1$*. Si G admet un sous-groupe distingué d'ordre n, alors G admet un sous-groupe d'ordre m.*

Sous les hypothèses du théorème, si N est un sous-groupe distingué d'ordre n et K est sous-groupe d'ordre m, alors on déduit que $G = NK = \{nk : n \in N,\ k \in K\}$.

L'objectif du projet est d'étudier la preuve du théorème de Shur-Zassenhaus telle qu'exposée dans [1] ou [2]. Les outils utilisés incluent d'une part des arguments standard de théorie des groupes, notamment les théorèmes de Sylow et certaines propriétés de structure des groupes abéliens finis, et d'autre part une construction plus avancée prenant comme objets de base les suites exactes courtes de groupes finis.

On illustrera enfin le théorème avec quelques applications.

Références

[1] G. Chenevier, *Algèbre*, disponible à l'adresse `http://gaetan.chenevier.perso.math.cnrs.fr/ALG1/Algebre_ENS_Chenevier.pdf`

[2] K. Conrad, *The Schur-Zassenhaus Theorem*, disponible à l'adresse `https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/schurzass.pdf`.

[3] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, 2nd ed., GTM Springer-Verlag (1996).

Sujet 7

Étude de la transformée de Fourier

Sujet proposé par Karim Kellay

kkellay@math.u-bordeaux.fr

Dans ce travail, nous allons étudier la transformée de Fourier. Nous nous intéresserons tout d'abord au **théorème de Plancherel**, qui garantit la conservation de l'énergie dans l'espace des fonctions à carré sommable.

Nous aborderons ensuite le **théorème d'inversion**, qui permet de retrouver une fonction à partir de sa transformée de Fourier. Enfin, nous démontrerons comment la transformée de Fourier s'applique à l'**équation de la chaleur**, en utilisant la méthode de séparation des variables.

Références

[1] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill, 1987.

Sujet 8

Découpage d'un carré en triangles de même aire

Sujet proposé par Vincent Koziarz

vincent.koziarz@math.u-bordeaux.fr

Sujet déjà pris

On se propose de trouver à quelle condition sur le nombre de triangles, il est possible de découper un carré en triangles de même aire. La réponse à ce problème a été donnée par P. Monsky en 1970. Bien que l'énoncé soit élémentaire, elle nécessite l'introduction d'un outil assez sophistiqué, à savoir la théorie des valuations sur un corps. Le reste du raisonnement repose sur des arguments combinatoires assez simples.

Si les personnes qui choisissent ce sujet sont motivées, on pourra aborder le cas général (traité par E. A. Kasimatis) des polygones réguliers que l'on voudrait découper en triangles de même aire.

Références

[1] E. A. Kasimatis, *Dissections of regular polygons into triangles of equal areas*, Discrete Comput. Geom. 4 (1989), 375-381.

[2] S. Lang, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics **211**, Springer-Verlag, 2002 (existe aussi en Français).

[3] P. Monsky, *On dividing a square into triangles*, Amer. Math. Monthly **77** (1970), 161-164.

Sujet 9

Factorisation de polynômes à coefficients entiers grâce à l'algorithme LLL

Sujet proposé par Alice Pellet-Mary

alice.pellet-mary@math.u-bordeaux.fr

Sujet déjà pris

L'objectif du TER sera d'étudier un algorithme du à Lenstra, Lenstra et Lovasz [1], qui permet de factoriser des polynômes à coefficients entiers en temps polynomial. Cet algorithme fait intervenir des réseaux euclidiens (des sortes d'espaces vectoriels mais sur $\mathbf{Z}$). L'une des étapes clé de l'algorithme est une méthode qui permet d'obtenir une base relativement courte d'un réseaux euclidien, en partant d'une base quelconque. Cette sous-étape de l'algorithme de factorisation s'est révélée utile pour de nombreuses autres applications en théorie des nombres, et l'algorithme calculant une base relativement courte d'un réseau euclidien est maintenant connu sous le nom d'algorithme LLL (du nom des trois auteurs). Aucune connaissance préalable en algorithmique n'est nécessaire pour ce projet, mais le sujet portera sur des questions d'algorithmique et de complexité. Côté mathématiques, les objets étudiés seront principalement des matrices et des polynômes à coefficients rationnels, ainsi qu'un petit peu d'extensions de corps.

Références

[1] A. K. Lenstra, H. W. Lenstra, L. Lovász, *Factoring polynomials with rational coefficients* Mathematische annalen **261**, 515-534 (1982).

Sujet 10

Variété centrale et bifurcation

Sujet proposé par Philippe Thieullen

philippe.thieullen@u-bordeaux.fr

Une équation différentielle ordinaire peut dépendre de plusieurs paramètres. Une bifurcation apparaît lorsque le comportement qualitatif de cette équation change radicalement lorsqu'un paramètre traverse une valeur critique. Il est facile de comprendre le phénomène de bifurcation en dimension 1. En dimension plus grande il peut être intéressant de baisser la dimension du système en faisant apparaître une variété invariante par le flot des solutions, appelée variété centrale.

L'objet du mémoire consiste à s'initier à la théorie de la bifurcation en petite dimension et de d'emontrer rigoureusement l'existence de variétés centrales en toute dimension. On s'appuiera sur les premiers chapitres de [1]. Éventuellement on pourra compléter l'exposé par des simulations sur le logiciel Python.

Pré-requis : Avoir suivi un cours de Calcul différentiel et équations différentielles en L3

Références

[1] M. Haragus, G. Iooss, *Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite-Dimensional Dynamical Systems*, Springer, Universitext (2011)