

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
Master 1 CSI
4TCY703U - Arithmétique
Feuille 1

Exercice 1. (1) Calculer l'inverse de $\overline{13}$ dans l'anneau $\mathbf{Z}/57\mathbf{Z}$.

(2) On pose $P(X) = X^5 + X + 1$ et $Q(X) = X^3 + 1$. Calculer l'inverse de $\overline{Q(X)}$ dans l'anneau $\mathbf{Q}[X]/\langle P(X) \rangle$.

(3) On pose $P(X) = X^5 + X + 1$ et $Q(X) = X^3 + X + 1$. Calculer l'inverse de $\overline{Q(X)}$ dans l'anneau $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[X]/\langle P(X) \rangle$.

Exercice 2. Soit K un corps.

(1) Soient $P(X)$ et $Q(X)$ dans $K[X]$. Montrer que $P(X)$ et $Q(X)$ sont premiers entre eux si et seulement si $P(X) + Q(X)$ et $P(X)Q(X)$ sont premiers entre eux.

(2) Trouver $P(X), Q(X) \in K[X]$ tel que $\text{pgcd}(P(X), Q(X)) \neq \text{pgcd}(P(X)+Q(X), P(X)Q(X))$.

Exercice 3. (1) Trouver tous les $x \in \mathbf{Z}/24\mathbf{Z}$ vérifiant $\overline{7}x = \overline{2}$.

(2) On pose $P(X) = X^4 + 2X^2 + 1 \in (\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})[X]$. Trouver tous les $Q(X) \in (\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})[X]$ vérifiant $(X^2 - 1)Q(X) \equiv X^3 + 2X + 2 \pmod{P(X)}$.

Exercice 4. (1) Calculer dans $\mathbf{Q}[X]$ le reste de la division euclidienne de $(X + 3)^{2016}$ par $X^2 + 6X + 8$.

(2) Calculer dans $\mathbf{Q}[X]$ le reste de la division euclidienne de X^{2016} par $X^2 + 2X + 1$.

Exercice 5. Soient K un corps, $P(X) \in K[X]$ non nul et $Q(X)$ un diviseur de $P(X)$.

(1) Montrer qu'il existe des polynômes $F(X), G(X) \in K[X]$ vérifiant $P(X) = F(X)G(X)$, $F(X)$ et $G(X)$ sont premiers entre eux, $Q(X)$ divise $F(X)$ et tout facteur irréductible de $F(X)$ divise $Q(X)$.

(2) En déduire que le morphisme canonique $(K[X]/\langle P(X) \rangle)^\times \rightarrow (K[X]/\langle Q(X) \rangle)^\times$ est surjectif.

Exercice 6. Trouver tous les couples $(x, y) \in (\mathbf{Z}/10\mathbf{Z})^2$ vérifiant $\overline{2}x + y = \overline{1}$ et $x + \overline{2}y = \overline{3}$.

Exercice 7. Quels sont dans $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})[X]$ les polynômes unitaires irréductibles de degré 2 ?

Exercice 8. L'anneau $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[X]/\langle X^4 + X^2 + 1 \rangle$ est-il un corps ?

Exercice 9. Quels sont les éléments inversibles de l'anneau $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[X]/\langle X^3 + 1 \rangle$?