

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
Master 1 CSI
4TCY703U - Arithmétique
Feuille 2

Exercice 1. Factoriser le polynôme $P(X) = X^5 + X + 1$ dans $\mathbf{F}_2[X]$. Quel est l'ordre du groupe $(\mathbf{F}_2[X]/\langle P(X) \rangle)^\times$?

Exercice 2. On pose $A = \mathbf{F}_5[X]/\langle X^3 - X + 1 \rangle$. Montrer que $a^{25} = a$ pour tout $a \in A$ (on pourra utiliser le théorème chinois). Le groupe A^\times est-il cyclique ?

Exercice 3. Soient A et B deux anneaux commutatifs. Quelle est la caractéristique de l'anneau $A \times B$ (en fonction de celles de A et B) ?

Exercice 4. Soit K un corps fini de cardinal q . Soit p un nombre premier ne divisant pas q . Posons $\Phi(X) = X^{p-1} + \dots + X + 1$. On suppose que $\Phi(X)$ a une racine a dans K .

- (1) Déterminer l'ordre de a dans le groupe K^\times .
- (2) En déduire que p divise $q - 1$.

Exercice 5. Soient K un corps fini de cardinal q impair et $a \in K^\times$.

- (1) Vérifier que si a est un carré dans K^\times , alors $a^{(q-1)/2} = 1$.
- (2) Supposons $a^{(q-1)/2} = 1$ et $q \equiv 3 \pmod{4}$. Trouver un entier n tel que $(a^n)^2 = a$.

Exercice 6. Soit K un corps fini de cardinal 2048. Soit $x \in K^\times$ tel que $x \neq 1$. Quelle est la caractéristique p de K ? Quel est le degré de x sur \mathbf{F}_p ?

Exercice 7. On pose $K = \mathbf{F}_2[Y]/\langle Y^4 + Y + 1 \rangle$ et on désigne par α la classe de Y dans K . Notons $\beta = \alpha^2 + \alpha$.

- (1) Montrer que K est un corps.
- (2) Trouver le polynôme minimal de β sur \mathbf{F}_2 . Quel est le cardinal de $\mathbf{F}_2(\beta)$?
- (3) Factoriser $X^3 + 1$ dans $K[X]$.
- (4) Quel est le polynôme minimal de α sur $\mathbf{F}_2(\beta)$?

Exercice 8. On pose $K = \mathbf{F}_5[Y]/\langle Y^3 + 2Y + 1 \rangle$ et on note α la classe de Y dans K .

- (1) Vérifier que K est un corps.
- (2) Trouver le polynôme minimal de $\alpha + 1$ sur \mathbf{F}_5 .

Exercice 9. Soit p un nombre premier impair. Montrer que les anneaux $\mathbf{F}_p[X]/\langle X^3 - X \rangle$ et \mathbf{F}_p^3 sont isomorphes.