UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
Théorie des Groupes

Devoir surveillé, le 27 octobre 2023

Durée 1h30. Documents non autorisés

Exercice 1. Soit p un nombre premier. On note $\mathbf{F}_{p^2}$ un corps fini à p^2 éléments. Soit $K = \mathbf{F}_{p^2}(T)$ le corps des fractions de l'anneau des polynômes $\mathbf{F}_{p^2}[T]$. On fixe une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. Soit $P(X) = X^{p^3} - T^2 X^p + T \in K[X]$.

1) Montrer que pour tout $a \in \overline{K}$, le polynôme $X^p - a$ a une racine dans $\overline{K}$ et une seule.

2) Montrer que $P(X)$ est irréductible sur K. (Indication : utiliser un critère d'irréductibilité).

On fixe une racine θ de $P(X)$ dans $\overline{K}$. Soient α et $\beta \in \overline{K}$ deux éléments tels que $\alpha^p = T^2$ et $\beta^{p^2-1} = \alpha$.

3) Montrer que l'ensemble des racines de $P(X)$ dans $\overline{K}$ est

$$\{\theta + c\beta \mid c \in \mathbf{F}_{p^2}\}.$$

(Indication : montrer d'abord que les racines du polynôme $X^{p^2} - \alpha X$ sont les éléments $c\beta$, $c \in \mathbf{F}_{p^2}$).

4) Montrer que $K[\theta, \beta]$ est le corps de décomposition de $P(X)$.

5) Décrire l'ensemble $\mathrm{Hom}_K(K[\theta], \overline{K})$ et donner son cardinal. L'extension $K[\theta]/K$, est-elle séparable ?

6) Montrer que $K[\theta^p]$ est une extension séparable de degré p^2 sur K. L'extension $K[\theta]/K[\theta^p]$, est-elle séparable ?

7) Montrer que $K[\theta^p] = \{x \in K[\theta] \mid x \text{ est séparable sur } K\}$. (Indication : montrer que si x est séparable sur K, alors $K[\theta^p, x]/K$ l'est aussi).

Tournez la page s.v.p.

Exercice 2. Soient F et L deux extensions d'un corps K qui sont contenues dans une clôture algébrique fixée $\overline{K}$ de K. Supposons que les conditions suivantes sont remplies :

a) L/K est une extension monogène et normale, engendré par un élément $\theta \in L$.
b) $F \cap L = K$.

Le but de cet exercice est de montrer que $[F[\theta] : F] = [L : K]$. On note $P(X) \in K[X]$ le polynôme minimal de θ sur K.

1) Soit $Q(X) \in F[X]$ le polynôme minimal de θ sur F. Montrer que $Q(X)$ divise $P(X)$ dans $F[X]$.

2) Montrer que toutes les racines de $Q(X)$ sont dans L.

3) En utilisant les relations coefficients-racines, en déduire que $Q(X) \in K[X]$ et conclure.

FIN