Université de Bordeaux
Semestre 7

Master Mathématiques fondamentales
Théorie de Galois et représentations

Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1
Désignons par α le réel $\sqrt{5+\sqrt{5}}$.
(1) Déterminer le polynôme minimal P de α sur $\mathbf{Q}$.
(2) Vérifier que $\mathbf{Q}(\alpha)$ est une extension de décomposition de $P \in \mathbf{Q}[X]$.
(3) Montrer que le groupe de Galois de $\mathbf{Q}(\alpha)$ sur $\mathbf{Q}$ est cyclique et en donner un générateur.
(4) Donner la liste des sous-corps de $\mathbf{Q}(\alpha)$.

Exercice 2
Soient $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et K un sous-corps de $\mathbf{C}$. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs qui appartiennent à K. On pose $L = K(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n})$.
(1) Démontrer que L est une extension galoisienne de K.
(2) Prouver que le groupe de Galois G de L sur K est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^k$ pour un certain $k \in \{0, \ldots, n\}$ (on pourra calculer σ^2 pour tout $\sigma \in G$).
(3) Posons $x = \sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_n}$. Montrer que $L = K[x]$.
(4) Quel est le nombre de sous-corps de L de degré 2 sur K ?

Exercice 3
(Groupe de Galois maximal). Soient p un nombre premier et $P \in \mathbf{Q}[X]$ un polynôme irréductible de degré p. On suppose que P a exactement $p-2$ racines réelles. Montrer que le groupe de Galois de P est isomorphe à $\mathfrak{S}_p$ (on pourra utiliser le lemme de Cauchy). Déterminer le groupe de Galois de $X^5 - 6X + 3$.

Exercice 4
Soient K un corps et L/K une extension finie galoisienne de groupe de Galois isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.
(1) Prouver qu'il existe un sous-corps M de L contenant K tel que $[M:K] = 3$.
(2) Démontrer que M n'est pas galoisienne sur K.
(3) En déduire qu'il existe $P \in K[X]$ irréductible de degré 3 tel que L soit une extension de décomposition de P.

Exercice 5
Désignons par α le réel $\sqrt{1+\sqrt{7}}$.
(1) Trouver le polynôme minimal P de α sur $\mathbf{Q}$. Que vaut $[\mathbf{Q}(\alpha):\mathbf{Q}]$?
(2) Vérifier que $K = \mathbf{Q}(\alpha, i\sqrt{6})$ est une extension de décomposition de $P \in \mathbf{Q}[X]$.
(3) Calculer le degré de K sur $\mathbf{Q}$.
(4) Montrer que le groupe de Galois de K sur $\mathbf{Q}$ est isomorphe à un groupe diédral.
(5) Donner la liste des sous-corps de K.

Exercice 6
Si $K \subset \mathbf{C}$ est une extension finie de $\mathbf{Q}$, un élément $\sigma \in \mathsf{Aut}_{\mathbf{Q}}(K)$ est-il nécessairement continu pour la topologie induite par $\mathbf{C}$?

Exercice 7
Soit $\mathbf{F}_{q^n}/\mathbf{F}_q$ une extension de corps finis.
(1) Montrer qu'elle est galoisienne et décrire la structure de son groupe de Galois.
(2) Quelles sont les sous-extensions ? Sont-elles galoisiennes sur $\mathbf{F}_q$? Si oui, décrire le groupe de Galois.

Exercice 8
Soient $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et $\zeta_n \in \mathbf{C}$ une racine primitive n-ième de l'unité. Montrer que $\mathbf{Q}(\zeta_n)/\mathbf{Q}$ est galoisienne de groupe de Galois isomorphe à $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$. En déduire les sous-corps de $\mathbf{Q}(\zeta_7)$.

Exercice 9
Montrer que $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ n'est contenu dans aucun corps cyclotomique.

Exercice 10
Soit G un groupe abélien fini. Montrer qu'il existe une extension galoisienne finie $K/\mathbf{Q}$ telle que $\mathsf{Gal}(K/\mathbf{Q}) \simeq G$.

Exercice 11
Soient L/K une extension finie galoisienne de groupe G et $a \in L$. Posons $n = [L : K]$, $r = [K(a) : K]$ et $H = \mathsf{Gal}(L/K(a))$. Montrer que si $g_1, \dots, g_r$ est un système complet de représentants des classes à gauche de G modulo H, alors le polynôme minimal de a sur K est $P(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - g_i(a))$. En déduire que $\prod_{\sigma \in G} (X - \sigma(a)) = P(X)^{n/r}$.

Exercice 12
Soient $f \in \mathbf{Q}[X]$ de degré n et K un corps de décomposition de f. On suppose que $\mathsf{Gal}(K/\mathbf{Q}) \simeq \mathfrak{S}_n$.
(1) Montrer que f est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.
(2) Soit $\alpha \in K$ une racine de f. À quel groupe $\mathsf{Gal}(K/\mathbf{Q}(\alpha))$ est-il isomorphe ?
(3) Soit $g \in \mathbf{Q}(\alpha)[X]$ un facteur irréductible de f dans $\mathbf{Q}(\alpha)[X]$. Quel est le degré de g ? En déduire que le seul automorphisme de $\mathbf{Q}(\alpha)$ est l'identité.

Exercice 13
Soient K un corps de caractéristique 0, et $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ des automorphismes de K deux à deux distincts. Montrer qu'ils sont algébriquement indépendants.

Exercice 14
Soient Ω/K une extension de corps, et L_1, L_2 deux sous-extensions finies, avec L_1/K galoisienne.
(1) Montrer que les extensions L_1L_2/L_2 et $L_1/L_1 \cap L_2$ sont finies galoisiennes.
(2) Montrer qu'on a un isomorphisme de groupes induit par la restriction

$$\rho\colon \mathsf{Gal}(L_1L_2/L_2) \to \mathsf{Gal}(L_1/L_1 \cap L_2).$$

[indication : pour la surjectivité, on regardera les points fixes de L_1 sous $\mathsf{Im}(\rho)$]. En déduire que $[L_1L_2 : L_2] = [L_1 : L_1 \cap L_2]$, puis que $[L_1L_2 : K] = \frac{[L_1:K][L_2:K]}{[L_1 \cap L_2:K]}$.
(3) Donner un exemple de sous-extensions non galoisiennes pour lesquelles l'égalité précédente n'est pas vérifiée.
(4) Supposons L_1/K et L_2/K galoisiennes. Montrer que L_1L_2/K et $L_1 \cap L_2/K$ sont finies galoisiennes.
(5) Montrer que l'application naturelle (donnée par les restrictions)

$$\psi\colon \mathsf{Gal}(L_1L_2/K) \to \mathsf{Gal}(L_1/K) \times \mathsf{Gal}(L_2/K)$$

est injective, d'image $\{(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathsf{Gal}(L_1/K) \times \mathsf{Gal}(L_2/K)\,;\, \sigma_{1|L_1 \cap L_2} = \sigma_{2|L_1 \cap L_2}\}$.
(6) En déduire que si les extensions L_1/K et L_2/K sont abéliennes (*i.e.* de groupes de Galois abélien), alors L_1L_2/K est abélienne.
(7) Donner un exemple d'un extension galoisienne L/K, et d'une sous-extension M telles que L/M et M/K soient abéliennes, mais pas L/K.