Feuille d'exercices n° 5

Dans tout ce qui suit, les représentations sont supposées complexes et de degré fini.

Exercice 1

Soient $n \geqslant 3$ et D_{2n} le groupe diédral (groupe d'isométries d'un polygone régulier à n côtés du plan euclidien). On rappelle qu'il est engendré par une rotation r d'ordre n et par une réflexion s : on a $srs^{-1} = r^{-1}$, et tout élément de D_{2n} s'écrit r^k ou sr^k avec $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

(1) Posons $\zeta = e^{2i\pi/n}$. Si $\ell \in \mathbf{Z}$ et $0 \leqslant k < n$, posons $\rho_\ell(r^k) = \begin{pmatrix} \zeta^{k\ell} & 0 \\ 0 & \zeta^{-k\ell} \end{pmatrix}$ et $\rho_\ell(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta^{-k\ell} \\ \zeta^{k\ell} & 0 \end{pmatrix}$. Prouver que ρ_ℓ est une représentation de D_{2n}, et calculer son caractère. Démontrer que pour $0 < \ell < n/2$, les représentations ρ_ℓ sont irréductibles et deux à deux non isomorphes.

(2) Montrer que ρ_ℓ est équivalente sur $\mathbf{C}$ à la représentation réelle qui à r associe la rotation d'angle $\frac{2\ell\pi}{n}$ et à s la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

(3) Chercher des représentations de dimension 1 et en déduire toutes les représentations irréductibles de D_{2n} [dans le cas où n est pair, on pourra décomposer $\rho_{n/2}$].

Exercice 2

Soit $\mathfrak{A}_4 \leqslant \mathfrak{S}_4$ le groupe alterné.

(1) Déterminer les classes de conjuguaison de $\mathfrak{A}_4$.

(2) En utilisant le groupe de Klein, construire trois caractères de degré 1 de $\mathfrak{A}_4$.

(3) En déduire que $\mathfrak{A}_4$ possède une représentation irréductible de dimension 3. Décrire cette représentation [on pourra considérer la représentation usuelle de $\mathfrak{A}_4$ dans $\mathbf{C}^4$] et donner la table des caractères de $\mathfrak{A}_4$.

Exercice 3

(Groupe affine de la droite sur $\mathbf{F}_q$). Soient p un nombre premier, $f \in \mathbf{N}_{>0}$ et $q = p^f$. On pose $G = \{x \mapsto ax + b\}_{(a,b) \in \mathbf{F}_q^\times \times \mathbf{F}_q}$.

(1) Expliciter G comme le produit semi-direct de $(\mathbf{F}_q, +)$ par $(\mathbf{F}_q^\times, .)$. Déterminez les classes de conjugaison de G (il y en a q).

(2) En déduire $q-1$ représentations de degré 1 de G, puis donnez la table des caractères de G.

(3) Notons V le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des applications de $\mathbf{F}_q$ dans $\mathbf{C}$. Montrer qu'il est naturellement muni d'une action de G. Décomposer V en somme de représentations irréductibles de G.

Exercice 4

Compléter la table de caractères suivante :

Classe de conjugaison Cardinal	$g_1 = 1$ 1	g_2 6	g_3 14	g_4 21
χ_0				
χ_1				
χ_2				
χ_3	6	-1		

Exercice 5

Posons $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$. Soit G un groupe dont la table des caractères commence par les deux lignes suivantes :

G	1	3	3	7	7
χ_1	1	1	1	j	$\overline{j}$
χ_2	3	α	$\overline{\alpha}$	0	0

(la première ligne contient les cardinaux des classes de conjugaison).
(1) Compléter cette table.
(2) Déterminer le groupe G par générateurs et relations.

Exercice 6
(D_8 VS Q_8). On note D_8 le groupe diédral à 8 éléments : il est engendré par deux éléments r et s tels que $r^4 = s^2 = (rs)^2 = e$.
(1) Déterminer le centre $\mathsf{Z}(D_8)$ et les classes de conjugaison de D_8, puis expliciter $D_8/\mathsf{Z}(D_8)$.
(2) Dresser la table des caractères du groupe $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$. En déduire les caractères de degré 1 de D_8.
(3) En déduire la table des caractères de D_8.
On note Q_8 le groupe quaternionique (on a $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ avec $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$).
(4) Déterminer le centre $\mathsf{Z}(Q_8)$ et les classes de conjugaison de Q_8, puis expliciter $Q_8/\mathsf{Z}(Q_8)$.
(5) En déduire les caractères de degré 1 de Q_8.
(6) En déduire la table des caractères de Q_8.
(7) Les groupes D_8 et Q_8 sont-ils isomorphes ? Qu'en conclure ?

Exercice 7
(1) Donner les classes de conjugaison du groupe $\mathfrak{S}_4$ (on précisera leurs cardinaux respectifs).
(2) Combien le groupe $\mathfrak{S}_4$ a-t-il de représentations irréductibles ?
(3) Donner deux représentations de dimension 1.
(4) Décomposer la représentation de permutation associée à l'action naturelle de $\mathfrak{S}_4$ sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$.
(5) En déduire deux représentations irréductibles de dimension 3 non-isomorphes (indication : utiliser la question (3)).
(6) Dresser la table des caractères du groupe $\mathfrak{S}_4$.
(7) Décrire « la » représentation irréductible de dimension 2 de $\mathfrak{S}_4$ [indication : construire un morphisme surjectif $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$].
(8) Parmi les représentations irréductibles, quelles sont celles dont la restriction à $\mathfrak{A}_4$ est encore irréductible ?

Exercice 8
(1) Décrire les classes de conjugaison du groupe $\mathfrak{A}_5$ (on précisera leurs cardinaux respectifs).
(2) Si χ est le caractère d'une représentation et $\sigma \in \mathfrak{A}_5$ est tel que σ^{-1} soit conjugué à σ dans $\mathfrak{A}_5$, montrer que $\chi(\sigma) \in \mathbf{R}$. En déduire que les caractères irréductibles de $\mathfrak{A}_5$ sont à valeurs réelles.
(3) Décomposer la représentation de permutation associée à l'action naturelle de $\mathfrak{A}_5$ sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
(4) En déduire que $\mathfrak{A}_5$ a une représentation irréductible X de degré 5 et deux représentations irréductibles Y et Z de degré 3 non isomorphes.
Posons $\tau = (1, 2)$, et si χ est une fonction centrale sur $\mathfrak{A}_5$, posons $\widetilde{\chi}\colon g \mapsto \chi(\tau^{-1} g \tau)$.
(5) Montrer que si χ est un caractère irréductible, il en est de même de $\widetilde{\chi}$.
(6) Montrer que $\widetilde{\chi}_X = \chi_X$ et que $\widetilde{\chi}_Y = \chi_Z$.
(7) Soit P l'ensemble des parties à deux éléments dans $\{1, \ldots, 5\}$. Calculer le caractère de la représentation de permutation associée et en déduire que cette dernière est isomorphe à $\mathbf{1} \oplus W \oplus X$ (où $\mathbf{1}$ désigne la représention triviale). En déduire χ_X.
(8) Dresser la table des caractères du groupe $\mathfrak{A}_5$.

Exercice 9
Dresser la table des caractères de $\mathfrak{S}_5$.

Exercice 10
Soit $n \in \mathbf{N}_{>0}$. Montrer que les caractères de $\mathfrak{S}_n$ sont à valeurs entières [indication : penser aux classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ et utiliser un argument galoisien].