UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
M1, Théorie de Galois et représentations
2022-2023

Devoir Maison 2

À rendre en TD le 1er décembre 2022 au plus tard

Exercice 1. Soit K le corps des fractions de l'anneau $\mathbf{F}_p[t]$ des polynômes à coefficients dans le corps fini $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. On pose $P(X) = X^p - X - 1/t \in K[X]$.

1) Montrer que $P(X)$ n'a pas de racines dans K.

2) Soit $\alpha \in \overline{K}$ une racine de $P(X)$. Montrer que $P(X)$ est séparable et exprimer les autres racines de $P(X)$ en termes de α.

3) Montrer que $P(X)$ est irréductible sur K.

4) Soit L le corps de décomposition de $P(X)$. Montrer que L/K est galoisienne de degré p et que $\mathrm{Gal}(L/K)$ est cyclique d'ordre p.

Exercice 2. Le but de l'exercice est de montrer que le corps $\mathbf{C}$ est algébriquement clos en utilisant la théorie de Galois, et (presque) pas d'analyse. Soit $K/\mathbf{C}$ une extension finie.

1) Montrer qu'il existe une extension finie L de K telle que $L/\mathbf{R}$ soit galoisienne (indication : construire L comme le corps de décomposition d'un polynôme convenable).

2) Expliquer pourquoi un polynôme de degré impair dans $\mathbf{R}[X]$ n'est pas irréductible sur $\mathbf{R}$.

3) En déduire que $\mathbf{R}$ n'admet aucune extension non triviale de degré impair.

4) Posons $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbf{R})$, et soit S un 2-Sylow de G. En considérant le corps L^S (les éléments de L fixes sous le groupe S), montrer que $G = S$.

5) En déduire que $H := \mathrm{Gal}(L/\mathbf{C})$ est un 2-groupe : écrivons $|H| = 2^r$.

6) Supposons $r > 0$: expliquer pourquoi H contient un sous-groupe d'indice 2.

7) En déduire l'existence d'une extension de degré 2 de $\mathbf{C}$, puis une contradiction.

8) Conclure que $K = \mathbf{C}$, et que $\mathbf{C}$ est algébriquement clos.

FIN