LE THÉORÈME DE TYCHONOFF

Ce qui suit est entièrement pompé de :
Douady & Douady : *Algèbre et théories galoisiennes*, Cassini (2005) ;
Kelley : *General Topology*, Springer Verlag (1975).

Définition 1. *Soit E un ensemble. Une* fonction de choix *sur E est une application*

$$\tau\colon \mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\} \to E$$

telle que $(\forall X \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\}) \quad \tau(X) \in X$.

Axiome du choix : Pour tout ensemble E, il existe une fonction de choix sur E.

Énoncé équivalent : Si X, Y sont des ensembles et $f\colon X \to Y$ une application surjective, alors f admet une section (*ie* il existe $g\colon Y \to X$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$).

Attention : “il existe” ne doit pas être pris dans le sens “on peut construire explicitement”.

En 1938, Gödel a prouvé que si la théorie des ensembles (avec les axiomes de Zermelo-Fraenkel) est contradictoire lorsqu'on lui ajoute l'axiome du choix, alors elle l'est aussi sans. De même (Cohen, 1963), si la théorie des ensembles n'est pas contradictoire, elle ne le devient pas si on ajoute l'axiome : “il n'existe pas de fonction de choix sur $\mathbf{R}$”.

De nos jours, presque tout le monde admet et utilise l'axiome du choix, bien qu'il ait des conséquences étonnantes (*cf* paradoxe de Banach-Tarski).

Définition 2. *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On dit qu'il est*

- bien ordonné *si toute partie non vide de E admet un plus petit élément ;*
- inductif *si toute partie bien ordonnée est majorée.*

Théorème de Zorn : Tout ensemble ordonné inductif non vide possède au moins un élément maximal.

C'est l'une des incarnations les plus utiles de l'axiome du choix. En voici quelques conséquences.

- Si X, Y sont des ensembles, il existe une injection de X dans Y ou il existe une injection de Y dans X.
- Tout ensemble peut être muni d'un bon ordre (théorème de Zermelo).
- Si A est un anneau commutatif et $I \subsetneq A$ un idéal propre, il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A tel que $I \subset \mathfrak{m}$.
- Tout espace vectoriel admet une base.
- Tout produit d'espaces topologiques compacts est compact pour la topologie produit (théorème de Tychonoff).
- Si E est un espace vectoriel normé sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, $x \in E$ de norme 1, il existe une forme linéaire u sur E telle que $\|u\| = 1$ et $u(x) = 1$ (théorème de Hahn-Banach).

Tychonoff avec filtres.

Définition 3. *Soit X un espace topologique. Un filtre sur X est une partie $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ telle que :*

(i) $\mathscr{F}$ est stable par intersection finie ;

(ii) $(F \in \mathscr{F}$ et $F \subset G) \Rightarrow G \in \mathscr{F}$;

(iii) $\varnothing \notin \mathscr{F}$.

Exemple de base : Pour $x \in X$, l'ensemble $\mathscr{V}_x$ des voisinages de x est un filtre sur X.

Définition 4. *Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux filtres sur X. On dit que*

- *$\mathscr{F}$ est* plus fin *que $\mathscr{G}$ si $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$;*
- *$\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont* compatibles *s'il existe un filtre $\mathscr{H}$ qui est plus fin que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ (pour cela, il faut et suffit que $(\forall F \in \mathscr{F})\ (\forall G \in \mathscr{G}) \quad F \cap G \neq \varnothing$ et dans ce cas $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \{F \cap G\}_{F \in \mathscr{F}, G \in \mathscr{G}}$ –le filtre intersection– est la borne supérieure de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ pour la relation de finesse) ;*
- *$\mathscr{F}$* converge *vers x (resp. $\mathscr{F}$ admet x comme* valeur d'adhérence*) si $\mathscr{F}$ est plus fin (resp. compatible avec) $\mathscr{V}_x$.*

Remarque : un filtre $\mathscr{F}$ admet x comme valeur d'adhérence si et seulement si $x \in \overline{F}$ pour tout $F \in \mathscr{F}$.

Définition 5. *Un ultrafiltre est un filtre maximal pour la relation de finesse (ie. au sens de l'inclusion).*

Exemple : si $x \in X$, $\mathscr{U}_x = \{F \subset X, x \in F\}$ est un ultrafiltre.

Proposition 1. *(a) Si un ultrafiltre $\mathscr{U}$ admet x comme valeur d'adhérence, alors $\mathscr{U}$ converge vers x.*

(b) Si $\mathscr{F}$ est un filtre sur X, il existe un ultrafiltre plus fin que $\mathscr{F}$.

Démonstration. (a) Si un ultrafiltre $\mathscr{U}$ est compatible à $\mathscr{V}_x$, alors $\mathscr{U} \cap \mathscr{V}_x$ est plus fin que $\mathscr{U}$ d'où $\mathscr{U} \cap \mathscr{V}_x = \mathscr{U}$ ie. $\mathscr{V}_x \subset \mathscr{U}$.

(b) Zorn.

□

Proposition 2. *(Caractérisation des compacts). Soit X un espace topologique séparé. Conditions équivalentes :*

(i) X est compact ;

(ii) tout filtre sur X admet une valeur d'adhérence ;

(iii) tout ultrafiltre sur X est convergent.

Démonstration. (i)$\Rightarrow$(ii) Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur X. L'ensemble de ses valeurs d'adhérence est $\bigcap\limits_{F \in \mathscr{F}} \overline{F}$. Si ce dernier est vide, il existe $F_1, \ldots, F_n \in \mathscr{F}$ tels que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{F}_i = \varnothing$ (par compacité). On a a fortiori $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i = \varnothing$, ce qui est impossible.

(ii)$\Rightarrow$(i) Soit $\{F_i\}_{i \in I}$ une famille de fermés de X telle que pour tout $J \subset I$ avec J fini, on $\bigcap\limits_{j \in J} F_j \neq \varnothing$. Soit $\mathscr{F}$ le filtre engendré par $\{F_i\}_{i \in I}$ (le plus petit filtre contenant les

F_i, il en existe vu l'hypothèse sur $(F_i)_{i\in I}$). Comme $\mathscr{F}$ admet un valeur d'adhérence, $\bigcap_{F\in\mathscr{F}} \overline{F} \neq \varnothing$ et a fortiori $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \varnothing$

(ii)⇒(iii) Tout ultrafiltre qui admet une valeur d'adhérence est convergent.

(iii)⇒(ii) Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur X. Si $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre sur X plus fin que $\mathscr{F}$ (il en existe), $\mathscr{U}$ converge vers $x \in X$, donc $\mathscr{F}$ admet x comme valeur d'adhérence.

□

Construction : filtre image par une application.
Soit $f\colon X \to Y$ une application et $\mathscr{F}$ un filtre sur X. Le *filtre image* de $\mathscr{F}$ par f est le filtre $f_*\mathscr{F}$ défini par

$$G \in f_*\mathscr{F} \Leftrightarrow f^{-1}(G) \in \mathscr{F}.$$

Proposition 3. *(a) Le filtre image d'un ultrafiltre est un ultrafiltre.*

(b) Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'espaces topologiques, soient $X = \prod_{i\in I} X_i$ muni de la topologie produit et pour $i \in I$, $p_i\colon X \to X_i$ la projection sur le facteur d'indice i. Pour qu'un filtre $\mathscr{F}$ sur X soit convergent, il faut et suffit que pour tout $i \in I$, le filtre $p_{i*}\mathscr{F}$ soit convergent (remarque : c'est faux avec "admette une valeur d'adhérence" à la place de "soit convergent").

Démonstration. (a) Remarquer que pour qu'un filtre soit un ultrafiltre, il faut et suffit que pour tout $A \subset X$, on a $A \in \mathscr{F}$ ou $X \setminus A \in \mathscr{F}$ (considérer $\{F \cap A\}_{F\in\mathscr{F}}$ et $\{F \cap (X \setminus A)\}_{F\in\mathscr{F}}$).

(b) Évident.

□

Le théorème de Tychonoff résulte des deux propriétés qui précèdent.

Tychonoff sans filtres. [1]

Théorème 1. *(Alexandrov) Soit X un espace topologique et $\mathcal{B}$ une base d'ouverts pour la topologie de X telle que de tout recouvrement de X par des éléments de $\mathcal{B}$, on peut extraire un recouvrement fini. Alors X est compact.*

Démonstration. Disons qu'une famille de parties de X est *non couvrante* (NC) si elle ne recouvre pas X, et *finiment non couvrante* (FNC) si aucune sous-famille finie ne recouvre X. Si X est un espace tologique séparé, la compacité de X équivaut à : toute famille d'ouverts (FNC) est (NC). Il s'agit de montrer que l'on peut se restreindre aux ouverts appartenant à $\mathcal{B}$.

Fait 1. Toute famille d'ouverts qui est (FNC) est incluse dans une famille d'ouverts (FNC) maximale (au sens de l'inclusion).

La classe des familles d'ouverts de X qui sont (FNC) est inductive (pour l'inclusion). En effet, soit $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ une famille bien ordonnée de familles d'ouverts, avec $\mathcal{F}_i$ (FNC) pour tout $i \in I$. Posons $\mathcal{F} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_i$. C'est une famille d'ouverts qui majore les $\mathcal{F}_i$. Montrons

1. Fumer est dangereux pour votre santé et celle de votre entourage.

qu'elle est (FNC). Supposons le contraire : on a $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{F}$ tels que $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$. Comme $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ est bien ordonnée, il existe $i_0 \in I$ tel que $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{F}_{i_0}$, ce qui contredit le fait que $\mathcal{F}_{i_0}$ est (FNC). Il suffit alors d'appliquer le théorème de Zorn.

Fait 2. Soit $\mathcal{F}$ une famille d'ouverts (FNC) maximale (toujours au sens de l'inclusion). On a alors : si $U_1, \dots, U_n$ sont des ouverts de X tels que qu'il existe $V \in \mathcal{F}$ avec $U_1 \cap \dots \cap U_n \subset V$, alors il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $U_i \in \mathcal{F}$.

En raisonnant par récurrence, il suffit de traiter le cas $n = 2$.
Supposons $U_1 \notin \mathcal{F}$. Par maximalité de$\mathcal{F}$, la famille $\mathcal{F} \cup \{U_1\}$ n'est pas (FNC) : il existe $A_1, \dots, A_r \in \mathcal{F}$ tels que $U_1 \cup A_1 \cup \dots \cup A_r = X$. Supposons $U_2 \notin \mathcal{F}$. De même, il existe $B_1, \dots, B_s \in \mathcal{F}$ tels que $U_2 \cup B_1 \cup \dots \cup B_s = X$. On a alors

$$\begin{aligned} X &= \big(U_1 \cup A_1 \cup \dots \cup A_r\big) \cap \big(U_2 \cup B_1 \cup \dots \cup B_s\big) \\ &= (U_1 \cap U_2) \cup A_1 \cup \dots \cup A_r \cup B_1 \cup \dots \cup B_s. \end{aligned}$$

Si on avait $U_1 \cap U_2 \subset V$ avec $V \in \mathcal{F}$, on aurait a fortiori $V \cup A_1 \cup \dots \cup A_r \cup B_1 \cup \dots \cup B_s = X$, ce qui contredirait le fait que $\mathcal{F}$ est (FNC).

Preuve du théorème. Soit une famille d'ouverts (FNC) quelconque, montrons qu'elle est (NC). Quitte à remplacer $\mathcal{F}$ par une famille d'ouverts (FNC) maximale qui la contient (possible en vertu du fait 1), on peut supposer $\mathcal{F}$ maximale.

Comme $\mathcal{F}$ est (FNC), il en est de même de $\mathcal{B} \cap \mathcal{F}$. Il suffit donc de montrer que

$$\bigcup_{U \in \mathcal{F}} U = \bigcup_{U \in \mathcal{B} \cap \mathcal{F}} U.$$

Soit $U \in \mathcal{F}$ et $x \in U$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de la topologie de X, il existe $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{B}$ tels que $x \in V_1 \cap \dots \cap V_n \subset U$. D'après le fait 2, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $V_i \in \mathcal{F}$ (rappelons que $\mathcal{F}$ est maximal). On a donc $x \in V_i \in \mathcal{B} \cap \mathcal{F}$, d'où l'iclusion de l'ensemble de gauche dans celui de droite. L'inclusion réciproque est évidente. Comme $\bigcup_{U \in \mathcal{B} \cap \mathcal{F}} U \neq X$ (car $\mathcal{B} \cap \mathcal{F}$ est (FNC) donc (NC)), on a fini. $\square$

Théorème 2. *(Tychonoff) Tout produit d'espaces compacts est compacts.*

Démonstration. Le fait qu'un produit d'espaces séparés est séparé est évident.

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces compacts on pose $X = \prod_{i \in I}$ et pour $i \in I$, on note $p_i \colon X \to X_i$ la projection sur le i-ème facteur. On définit une base d'ouverts de X (pour la topologie produit) en posant

$$\mathcal{B} = \{p_i^{-1}(U)\,;\, U \text{ ouvert de } X_i\}.$$

D'après le théorème d'Alexandrov, il suffit de montrer que toute sous-famille $\mathcal{F}$ de $\mathcal{B}$ qui est (FNC) est (NC).

Pour $i \in I$, posons

$$\mathcal{F}_i = \{U \subset X_i\,;\, U \text{ ouvert}, \ p_i^{-1}(U) \in \mathcal{F}\}.$$

Comme $\mathcal{F}$ est (FNC), c'est aussi le cas de $\mathcal{F}_i$ (car $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$). Pour tout $i \in I$, il existe donc $x_i \in X_i \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{F}_i} U$. Si $x = (x_i)_{i \in I} \in X$, on a alors $x \in X \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U$ et $\mathcal{F}$ est (NC). $\square$