TOPOLOGIE ET ANALYSE FONCTIONNELLE
FEUILLE D'EXERCICES N°2

MASTER DE MATHÉMATIQUES, PREMIER SEMESTRE, ANNÉE 2005/2006

Exercice 1. Un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.

Exercice 2. Les espaces topologiques $X =]0,1[$ et $Y = [0,1[$ ne sont pas homéomorphes. Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $f(X) \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$ et $U = \{x \in \mathbb{C}^n,\ f(x) \neq 0\}$. Montrer que U est connexe par arcs.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. Un endomorphisme f de E est dit *cyclique* s'il existe $x \in E$ tel que la famille $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ est une base de E. Montrer que l'ensemble Γ des endomorphismes cycliques de E forme un ouvert connexe de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$.

Exercice 6. Soit X une espace compact, Y un espace séparé et $f\colon X \to Y$ une bijection continue. Montrer que f^{-1} est continue.

Exercice 7. Soit X un espace compact. On se donne deux fonctions f et g continues sur X telles que $f \geq 0$ sur X et $f(x) = 0 \Rightarrow g(x) > 0$. Monter qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $(\forall x \in X)\ \lambda f(x) + g(x) > 0$.

Exercice 8. Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, converge simplement vers une fonction f, et que f est continue. Montrer que la convergence est uniforme (théorème de Dini). On pourra poser $F_{\varepsilon,n} = \{x \in [a,b],\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9. Soient X un espace topologique compact, F_1 et F_2 deux fermés disjoints de X. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U_1 et U_2 tels que $F_1 \subset U_1$ et $F_2 \subset U_2$.

Exercice 10. Soit (E,d) un espace métrique compact et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E telle que $\lim\limits_{n\to\infty} d(u_{n+1}, u_n) = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partie non vide connexe et compacte de E (on pourra poser $U_n = \{u_p,\ p \geq n\}$).

Exercice 11. Soit X un espace topologique et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides. On note $K = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$.

(i) Montrer que $K \neq \varnothing$.

(ii) Soit U un ouvert contenant K. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $K_n \subset U$.

Exercice 12. Soient X un espace métrique et Y un espace métrique compact. Soit $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que les fonctions M et m définies par $M(x) = \sup\limits_{y \in Y} f(x,y)$ et $m(x) = \inf\limits_{y \in Y} f(x,y)$, sont continues sur X.

Exercice 13. Soit (X,d) un espace métrique compact et $f\colon X \to X$ une dilatation (ie. $d(f(x),f(y)) \geq d(x,y)$, $\forall x,y \in X$).

(a) Montrer que $\forall x,y \in X$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists p \in \mathbb{N}_{>0}$, $d(x, f^p(x)) \leq \varepsilon$ et $d(y, f^p(y)) \leq \varepsilon$. En déduire que f est une isométrie de X sur X.

(b) Montrer que f est un homéomorphisme (on montrera que $f(X)$ est dense dans X).

Exercice 14. (Ensemble triadique de Cantor). Soit $K_0 = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $K_{n+1} = \frac{1}{3}K_n \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}K_n\right)$ (on a $K_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, $K_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ etc.).

(a) Montrer que $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts. Posons $K = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} K_n$. Montrer que K est un compact non vide.

(b) Montrer que le complémentaire de K est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts, dont la somme des longueurs vaut 1.

(c) Montrer que K est l'ensemble des réels dans $[0,1]$ dont le développement triadique ne comporte que des 0 et des 2 (en admettant les développements composés uniquement de 2 à partir d'un certain rang).

(d) Montrer que K est en bijection avec $[0,1]$ mais que K est d'intérieur vide.