TOPOLOGIE ET ANALYSE FONCTIONNELLE
FEUILLE D'EXERCICES N°3

MASTER DE MATHÉMATIQUES, PREMIER SEMESTRE, ANNÉE 2005/2006

Exercice 1. Une intersection d'ouverts denses est-elle un ouvert ?

Exercice 2. Soit(X, d) un espace métrique non vide, complet, sans point isolé. Montrer que X n'est pas dénombrable.

Exercice 3. Soit $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ continue telle que $(\forall x \in \mathbb{R}_{>0})\ \lim\limits_{n\to\infty} f(nx) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ (poser $F_n = \{x \in \mathbb{R}_{>0},\ (\forall m \geq n)\ |f(mx)| \leq \varepsilon\}$).

Exercice 4. Soit $(X, .)$ un groupe abélien muni d'une métrique d telle que que la multiplication et le passage à l'inverse soient continus. On suppose en outre que (X, d) est compact. On se propose de démontrer qu'il n'existe pas d'isomorphisme continu de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(X, .)$. On suppose par l'absurde que T est un tel isomorphisme.

(i) Pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$, soit $I_n = [-n, n]$. Montrer qu'il existe p tel que $T(I_p)$ soit d'intérieur non vide.

(ii) Montrer qu'on peut trouver $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}$ tels que $T^{-1}(X) = \bigcup\limits_{i=1}^{N}(x_i + I_p)$.

(iii) Conclure.

Exercice 5. Un nombre réel x est dit de Liouville s'il n'est pas rationnel et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des entiers p et q avec $q > 1$ tels que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$. Montrer que l'ensemble des nombres de Liouville est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6. (Une démonstration du théorème de Banach-Steinhaus n'utilisant pas le théorème de Baire). Soient E, F deux espaces de Banach et $\mathcal{E}$ un sous-ensemble des applications linéaires continues de E dans F.

On suppose que pour tout $v \in E$, on a $\sup\limits_{T\in\mathcal{E}}\{\|Tv\|\} < +\infty$, et que $\sup\limits_{T\in\mathcal{E}}\{\|T\|\} = +\infty$. Construire par récurrence des suites $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\|x_n\| = 1$, $\|T_n x_n\| \geq \|T_n\|/2$, et si $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{4^n}$, on a $\|T_n x\| > n$.

Exercice 7. Soit E un espace de Banach et B' une partie de E' (dual topologique de E). On suppose que pour tout $x \in E$, l'ensemble $\langle B', x\rangle = \{f(x),\ f \in B'\}$ est borné dans $\mathbb{R}$. Montrer que B' est bornée dans E'.

Exercice 8. (Contre-exemples à Banach-Steinhaus).

(a) Soient $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme donnée par le sup des coefficients, et pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n\colon P \mapsto P^{(n)}(0)$.

(b) Soient $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$, et pour $h \in]0,1[$, $T_h\colon f \mapsto \frac{f(h)-f(0)}{h}$.

Exercice 9. Soient E, F des Banach, G un espace vectoriel normé et $u\colon E \times F \to G$ bilinéaire. Montrer que u est continue si et seulement si u est séparément continue (ie. les applications $u(x,.)$ et $u(.,y)$ sont continues pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$).

Exercice 10. Soit X un espace topologique compact, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $E = \mathscr{C}^0(X,\mathbb{K})$. Montrer que toutes les normes sur E qui rendent E complet et entraînent la convergence simple sont équivalentes.