TOPOLOGIE ET ANALYSE FONCTIONNELLE
FEUILLE D'EXERCICES N°2

MASTER DE MATHÉMATIQUES, PREMIER SEMESTRE, ANNÉE 2006/2007

Exercice 1. (Convolution). Soient $N \in \mathbf{N}_{>0}$, $p \in [1, \infty]$, $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^N)$ et $g \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^N)$. On veut montrer que pour presque tout $x \in \mathbf{R}^N$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbf{R}^N$ et que si

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}\,y$$

alors $f * g \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^N)$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

(1) Traiter les cas $p = \infty$ et $p = 1$.

(2) Si $p \in]1, \infty[$, on majorera l'intégrale $\int_{\mathbf{R}^N} \Big(\int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}\,y \Big) h(x)\,\mathrm{d}\,x$ pour $h \in \mathrm{L}^q(\mathbf{R}^N)$ où q est l'exposant conjugué de p (*i.e.* $1/p + 1/q = 1$).

Soient $\Omega \subseteq \mathbf{R}^N$ et $f \colon \Omega \to \mathbf{R}$. On note $\omega \subseteq \Omega$ le plus grand ouvert sur lequel f est nulle presque partout (c'est la réunion des ouverts de Ω sur lesquels f est nulle presque partout, il est facile de voir que c'est une réunion dénombrable de tels ouverts). Le *support* de f est $\mathrm{supp}(f) = \Omega \setminus \omega$. Pour $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, on note $\mathscr{C}_c^k(\mathbf{R}^N)$ l'espace des fonctions de classe C^k à support compact sur $\mathbf{R}^N$.

Exercice 2. Soient $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^N)$ et $g \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^N)$. Montrer que

$$\mathrm{supp}(f * g) \subseteq \overline{\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)}.$$

Exercice 3. (1) Montrer que si $f \in \mathscr{C}_c^0(\mathbf{R}^N)$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^N)$, alors $f * g \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}^N)$.

(2) Montrer que si $f \in \mathscr{C}_c^k(\mathbf{R}^N)$ avec $k \in \mathbf{N}$, alors $f * g \in \mathscr{C}^k(\mathbf{R}^N)$.

Exercice 4. (Régularisation par convolution). Soit $(\rho_n)_{n \in \mathbf{N}_{>0}}$ une suite avec $\rho_n \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}^N)$. On dit que $(\rho_n)_{n \in \mathbf{N}_{>0}}$ est *régularisante* si $\rho_n \geq 0$, $\int_{\mathbf{R}^N} \rho_n = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, et pour tout $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$, on a $\lim\limits_{n \to \infty} \int_{\mathbf{R}^N \setminus \mathrm{B}(0,\delta)} \rho_n = 0$.

(0) Construire une suite régularisante en utilisant $\rho \colon x \mapsto \begin{cases} \exp\Big(\frac{1}{\|x\|-1}\Big) & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1 \end{cases}$.

(1) Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}^N)$, alors $\rho_n * f$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbf{R}^N$.

(2) Supposons en outre qu'en fait, on a $\mathrm{supp}(\rho_n) \subseteq \mathrm{B}(0, 1/n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$. Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^N)$ avec $1 \leq p < \infty$, alors $\rho_n * f$ converge vers f dans $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^N)$ (on rappelle que $\mathscr{C}_c^0(\Omega)$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$).

(3) En déduire que si $\Omega \subseteq \mathbf{R}^N$ est un ouvert et $1 \leq p < \infty$, alors $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$.

Exercice 5. Soient $(E, \|.\|)$ un espace normé, $F \subseteq E$ un sous-espace, $f \colon F \to \mathbf{R}$ une forme linéaire continue et $x \in E \setminus F$. Montrer qu'on peut prolonger f en une forme linéaire continue $\widetilde{f} \colon F \oplus \mathbf{R}\,x \to \mathbf{R}$ avec $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$ (on cherchera l'encadrement que doit vérifier $\widetilde{f}(x)$).

Exercice 6. Soient E un espace vectoriel normé sur $\mathbf{R}$, f une forme linéaire non nulle sur E et $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que l'hyperplan d'équation $f(x) = \alpha$ est fermé si et seulement si f est continue.

Exercice 7. (1) Soient E un espace vectoriel normé et F un sous espace vectoriel fermé de E. Montrer qu'on munit l'espace vectoriel quotient E/F en posant

$$\|x + F\|_{E/F} = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

(2) Soit $x \in E \setminus F$. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue f sur E telle que $f_{|F} = 0$ et $f(x) > 0$ (en particulier, on peut séparer strictement x et F).

Exercice 8. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et E' son dual muni de la norme usuelle. On veut montrer que si E' est séparable alors E est séparable.

(1) On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dense de E'. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E telle que $(\forall n \in \mathbf{N})\ f_n(x_n) \geq \frac{1}{2}\|f_n\|$ et $\|x_n\| = 1$.
(2) Montrer que l'espace vectoriel engendré par les x_n est dense dans E.
(3) Soit $\ell^\infty(\mathbf{R}) = \{x\colon\ \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ x \text{ est bornée}\}$ l'ensemble des suites bornées, normé par $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |x(n)|$. Montre que ℓ^∞ n'est pas séparable (on pourra considérer le sous-ensemble $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$). En déduire que l'application naturelle $\ell^1(\mathbf{R}) \to (\ell^\infty(\mathbf{R}))'$ n'est pas surjective (où $\ell^1(\mathbf{R}) = \{x\colon\ \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ \sum_{n\in\mathbf{N}} |x(n)| < \infty\}$).

Exercice 9. Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $u\colon E \to F$ linéaire continue. On définit $u^*\colon F' \to E'$ par $u^*(\varphi) = \varphi \circ u$. Montrer que u^* est continue et que $\|u^*\|_{\mathcal{L}(F',E')} = \|u\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Exercice 10. Soient E un espace de Banach et $F \subseteq E$ un sous-espace de dimension finie. Alors F admet un supplémentaire topologique.