TOPOLOGIE ET ANALYSE FONCTIONNELLE
FEUILLE D'EXERCICES N°3

MASTER DE MATHÉMATIQUES, PREMIER SEMESTRE, ANNÉE 2006/2007

Exercice 1. Donner un exemple d'application continue bijective dont l'inverse est non continu.

Exercice 2. Soient E, F deux espaces topologiques, $f\colon E \to F$ une application et $x \in E$. On suppose que x admet une base dénombrable de voisinages. Alors f est continue en x si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers x, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(x)$.

Exercice 3.
(1) Soit E un espace topologique. Montrer que E est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta_E = \{(x,x) \in E \times E,\ x \in E\}$ est une partie fermée de $E \times E$.
(2) Soient E, F des espaces topologiques, avec F séparé et $f\colon E \to F$ une application continue. Montrer que son graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in E \times F,\ x \in E\}$ est une partie fermée de $E \times F$.

Connexité. Soit X un espace topologique. On dit que X est *connexe* si dès que $X = U \cup V$ avec $U \subseteq X$ et $V \subseteq X$ ouverts disjoints, on a $U = X$ ou $V = X$. En passant aux complémentaires, on a une définition équivalente en prenant des fermés. Cela revient aussi à dire que les seules parties de X à la fois ouvertes et fermées sont $\varnothing$ et X.

On montre que les parties connexes de $\mathbf{R}$ (muni de la topologie usuelle) sont les intervalles.

Si $x_0, x_1 \in X$, un *chemin* de x_0 vers x_1 dans X est une application continue $\gamma\colon [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x_1$. On dit que X est *connexe par arcs* si pour tout couple (x_0, x_1) de points de X, il existe in chemin de x_0 vers x_1.

Exercice 4.
(1) Montrer que X est connexe si et seulement si toute application continue $f\colon X \to \{0,1\}$ (où $\{0,1\}$ est muni de la topologie discrète) est constante.
(2) Soient X, Y deux espaces topologiques avec X connexe et $f\colon X \to Y$ une application continue. Montrer que $f(X)$ est connexe.
(3) Montrer que la connexité par arcs implique la connexité.
(4) Soit $n \in \mathbf{N}_{>0}$. Montrer qu'un ouvert connexe de $\mathbf{R}^n$ est connexe par arcs.
(5) Soit $f \in \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n] \setminus \{0\}$ et $U_f = \{x \in \mathbf{C}^n,\ f(x) \neq 0\}$. Montrer que U_f est connexe par arcs.
(6) Montrer que $\mathsf{GL}_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs, mais que $\mathsf{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connnexe.

Exercice 5. Montrer que les espaces topologiques $X =]0,1[$ et $Y = [0,1[$ ne sont pas homéomorphes. Les espaces $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 6. (Le théorème de Banach-Steinhaus). Soient E, F deux espaces de Banach et $\mathscr{E}$ un sous-ensemble des applications linéaires continues de E dans F. On suppose que pour tout $v \in E$, on a $\sup\limits_{T\in\mathscr{E}}\{\|Tv\|\} < +\infty$. On veut montrer que $\sup\limits_{T\in\mathscr{E}}\{\|T\|\} < \infty$ ("toute famille d'applications linéaires ponctuellement bornée est uniformément bornée").

On procède par l'absurde : supposons que $\sup_{T\in\mathcal{E}}\{\|T\|\} = \infty$. Construire par récurrence des suites $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\|x_n\| = 1$, $\|T_n x_n\| \geq \|T_n\|/2$, et si $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{4^n}$, on a $\|T_n x\| > n$.

Exercice 7.
1. (1) Soient E un espace de Banach et $B \subseteq E$ tels que pour tout $\varphi \in E'$, l'ensemble $\varphi(B) = \{\varphi(x),\ x \in B\}$ est borné dans $\mathbf{R}$ (on dit que B est *faiblement borné*). Montrer que B est borné.
2. (2) Soient E un espace de Banach et $B' \subseteq E'$ tel que pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{\varphi(x),\ \varphi \in B'\}$ est borné. Montrer que B' est borné dans E'.

Topologie la moins fine rendant continue une famille de fonctions. Soient X un ensemble et $\left(\varphi_i\right)_{i\in I}$ une famille non vide de fonctions sur X à valeurs réelles. On appelle *topologie la moins fine rendant continue la famille* $\left(\varphi_i\right)_{i\in I}$ la topologie $\mathscr{T}$ sur X qui a le moins d'ouverts pour laquelle toutes les applications φ_i sont continues.

Exercice 8. Montrer que les ouverts de $\mathscr{T}$ sont les unions (quelconques) d'intersections *finies* d'ensembles de la forme $\varphi_i^{-1}(\Omega)$ avec $i \in I$ et Ω ouvert de $\mathbf{R}$. On montrera que cela définit bien une topologie pour laquelle les φ_i sont continues, et que c'est la moins fine pour cette propriété.

Exercice 9. (Topologie faible). Soient $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et E' le dual topologique de E. On munit E de la topologie la moins fine rendant continus les éléments de E' et on note $\sigma(E, E')$ cette topologie.

(1) Montrer que la topologie $\sigma(E, E')$ est séparée.
(2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de E. Montrer que :
  (i) $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$ si et seulement si $(\forall f \in E')\ f(x_n) \to f(x)$;
  (ii) si $x_n \to x$ pour $\|.\|$ alors $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$;
  (iii) si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$ alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$;
  (iv) si $x_n \rightharpoonup x$ et f_n converge vers f dans $(E', \|.\|_{E'})$ alors $f_n(x_n) \to f(x)$.
(3) On suppose que E est de dimension finie. Montrer que la topologie faible et la topologie usuelle coïncident.
(4) Soient E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire de E dans F. Montrer que T est continue de E dans F pour les topologies fortes si et seulement si T est continue de $(E, \sigma(E, E'))$ dans $(F, \sigma(F, F'))$.

Exercice 10. Soient $p \in]0, 1[$.

(1) Montrer que pour $s, t \in \mathbf{R}_{\geq 0}$, on a $(s + t)^p \leq s^p + t^p$.

On pose

$$\mathrm{L}^p([0,1]) = \left\{ f \colon [0,1] \to \mathbf{R} \cup \{\infty\},\ f \text{ est mesurable et } \int_0^1 |f(x)|^p \,\mathrm{d}\,x < \infty \right\} / E$$

où E est l'ensemble des fonctions presque nulles sur $[0, 1]$. Pour $f \in \mathrm{L}^p([0, 1])$, on pose $N_p(f) = \int_0^1 |f(x)|^p \,\mathrm{d}\,x$.

(2) Montrer que pour $f, g \in \mathrm{L}^p([0, 1])$, on a $N_p(f) = 0 \Rightarrow f = 0$ et $N_p(f + g) \leq N_p(f) + N_p(g)$.
(3) Montrer que $\mathrm{L}^p([0, 1])$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
(4) L'application N_p est-elle une norme ?

On munit $\mathrm{L}^p([0,1])$ de la structure d'espace vectoriel *topologique* pour laquelle une base de voisinages de 0 est donnée par la famille de "boules"

$$\left\{B(0,r) := \{f \in \mathrm{L}^p([0,1]),\ N_p(f) \leq r\}\right\}_{r \in \mathbf{R}_{>0}}.$$

(5) Soit $f \in \mathrm{L}^p([0,1])$ bornée. Pour $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $f_{k,n} = nf\mathbf{1}_{\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]}$. Montrer que $f = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_{k,n}$ et que $f_{k,n} \in B(0, \|f\|_\infty^p n^{p-1})$.

(6) En déduire que pour toute forme linéaire continue φ sur $\mathrm{L}^p([0,1])$, on a $\varphi(f) = 0$.

(7) En déduire que $\varphi = 0$.