LE THÉORÈME DE WEIERSTRASS SUR LES FONCTIONS CONTINUES : LA PREUVE DE BERNSTEIN

MASTER DE MATHÉMATIQUES, PREMIER SEMESTRE

Soient $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$. On note $\mathscr{C}^0([a,b], \mathbf{R})$ la $\mathbf{R}$-algèbre des fonctions continues sur le segment $[a, b]$. On le munit de la norme de la convergence uniforme définie par

$$\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Pour $f \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbf{R})$, et $\alpha \in \mathbf{R}_{>0}$, on pose

$$\omega_f(\alpha) = \sup_{|x-y|<\alpha} \big(|f(x) - f(y)|\big)$$

qu'on appelle *module de continuité* de f. Comme le segment $[a, b]$ est *compact*, si $f \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbf{R})$, alors f est *uniformément continue* : on a $\lim_{\alpha \to 0} \omega_f(\alpha) = 0$.

Théorème. (Weierstrass). *La sous-*$\mathbf{R}$*-algèbre des fonctions polynômiales est dense dans* $\mathscr{C}^0([a,b], \mathbf{R})$.

Quitte à effectuer le changement de variable $x = (b-a)t+b$, on peut supposer que $a = 0$ et $b = 1$. Pour $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ et $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on pose

$$\begin{aligned} b_n(f) \colon [0,1] &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

(où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binômial $\frac{n!}{k!(n-k)!}$). C'est une application polynômiale qu'on appelle *polynôme de Bernstein* de f. On définit ainsi un endomorphisme $\mathbf{R}$-linéaire b_n de $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$, dont l'image est incluse dans la sous-$\mathbf{R}$-algèbre des fonctions polynômiales. Le théorème résulte immédiatement de l'énoncé suivant :

Proposition. *On a* $\|b_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega_f\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big)$. *En particulier, la suite* $(b_n(f))_{n>0}$ *converge uniformément vers* f *sur* $[0,1]$.

Commencons par remarquer que $b_n(1)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} nx \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= nx b_{n-1}(1)(x) = nx \end{aligned}$$

et donc $b_n(x)(x) = x$. De même, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} n(n-1)x^2\binom{n-2}{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k}$$
$$= n(n-1)x^2 b_{n-2}(1)(x) = n(n-1)x^2$$

et donc $n^2 b_n(x^2)(x) = n(n-1)x^2 + nx$, d'où $b_n(x^2)(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$.

En particulier, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = b_n(x^2)(x) - 2x b_n(x)(x) + x^2 b_n(1)(x)$$
$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - 2x^2 + x^2 = \frac{x(1-x)}{n}.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit

$$\sum_{k=0}^{n} \left|\tfrac{k}{n} - x\right| \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}\sqrt{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}$$
$$\leq \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}.$$

Mais comme $x(1-x) \leq 1/4$ pour $x \in [0,1]$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \left|\tfrac{k}{n} - x\right| \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}. \tag{1}$$

Le nombre d'intervalles de longueur $\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui séparent x et k/n est majoré par $\lceil \left|\frac{k}{n} - x\right|\sqrt{n}\rceil \leq \left|\frac{k}{n} - x\right|\sqrt{n} + 1$. On a alors

$$|f(k/n) - f(x)| \leq \left(\left|\tfrac{k}{n} - x\right|\sqrt{n} + 1\right)\omega_f\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{2}$$

On a donc

$$|b_n(f)(x) - f(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n}(f(k/n) - f(x))\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| \qquad \text{car } b_n(1) = 1$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n} |f(k/n) - f(x)|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$\leq \omega_f\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\left|\tfrac{k}{n} - x\right|\sqrt{n} + 1\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \qquad \text{d'après (1)}$$
$$\leq \omega_f\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\tfrac{1}{2\sqrt{n}}\sqrt{n} + b_n(1)(x)\right) \qquad \text{d'après (2)}$$
$$\leq \frac{3}{2}\omega_f\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right).$$