Université de Bordeaux

Licence 3 - année 2022-2023
Structures algébriques 2 - 4TMFF502U

Devoir maison n°1

À rendre le 8 novembre

Exercice

Soit p un nombre premier. Le but de cet exercice est de redémontrer que tout groupe fini possède un p-Sylow. On n'utilisera donc pas ce résultat.

Soit G un groupe fini d'ordre $n = p^a m$ avec $a \in \mathbf{N}_{>0}$ et $\mathsf{pgcd}(m, p) = 1$.

(1) Montrer que pour tout $i \in \{0, \ldots, p^a - 1\}$, on a $v_p\left(\frac{p^a m - i}{p^a - i}\right) = 0$ (où $v_p(x)$ désigne la valuation p-adique de $x \in \mathbf{Q}^\times$). En déduire que l'entier $\binom{p^a m}{p^a}$ est premier avec p.

(2) Montrer que l'action de G sur lui-même par translation à gauche induit une action de G sur l'ensemble X des parties de cardinal p^a de G.

(3) Montrer qu'il existe $P \in X$ telle que $\# \mathsf{stab}_G(P)$ soit divisible par p^a.

(4) Soit $x \in P$. Montrer que $\{gx\}_{g \in \mathsf{stab}_G(P)} \subset P$. En déduire que $\mathsf{stab}_G(P)$ est un p-Sylow de G.

Problème

Dans tout ce qui suit, G désigne un groupe fini et Z son centre.

(1) Montrer que le groupe G/Z ne peut pas être cyclique d'ordre > 1.

(2) Soient p un nombre premier et G un p-groupe d'ordre > 1. Montrer que Z n'est pas réduit à l'élément neutre.

(3) En déduire qu'à isomorphisme près, les seuls groupes d'ordre p^2 sont $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ et $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2$.

Le but du reste de l'exercice est de classifier les groupes d'ordre 8 à isomorphisme près. On suppose donc désormais que G est d'ordre 8.

(4) Dans cette question, on suppose G abélien.

- (a) On suppose que G n'est pas cyclique, mais qu'il contient un élément g_0 d'ordre 4 : on pose $H = \langle g_0 \rangle$. Notons $f \colon G \to G$ l'application définie par $f(g) = g^2$ et posons $C = \mathsf{Ker}(f)$. Montrer que $f(G) \subset C$, en déduire que $\#C > 2$, puis que C n'est pas inclus dans H.
- (b) Sous les hypothèses du (a), on choisit $g \in C \setminus H$: montrer qu'alors $H \times \langle g \rangle \xrightarrow{\sim} G$.
- (c) En déduire qu'en général (*i.e.* en supposant G seulement abélien), G est isomorphe à $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$, $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ ou $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$.

On suppose désormais que G n'est *pas* abélien.

(5) Expliquer pourquoi G ne contient pas d'élément d'ordre 8, mais au moins un élément d'ordre 4.

On dispose donc d'un sous-groupe $C \leq G$ cyclique d'ordre 4.

(6) Dans cette question on suppose que $G \setminus C$ contient un élément s d'ordre 2. Expliquer pourquoi G est le produit semi-direct de C et $\langle s \rangle$. En déduire que G est isomorphe au groupe diédral D_8.

On suppose désormais que les éléments de $G \setminus C$ sont tous d'ordre 4.

(7) Montrer que $\#Z = 2$, puis que $G/Z \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$.

Écrivons $Z = \{\pm 1\}$ et choisissons $i, j \in G$ dont les images dans G/Z forment une base de G/Z sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On pose $k = ij$.

(8) Expliquer pourquoi i, j et k sont d'ordre 4. En déduire que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, puis que $ji = -ij$.

Ce qui précède montre que G est isomorphe au groupe quaternionique Q_8 : le sous-groupe de $\mathsf{SL}_2(\mathbf{C})$ engendré par $\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Finalement, on a montré qu'à isomorphisme près, il y a cinq groupes d'ordre 8.

(9) Auquel de ces cinq groupes le sous-groupe $T \leq \mathsf{GL}_3(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ constitué des matrices triangulaires supérieures est-il isomorphe ?

(10) Le groupe quaternionique Q_8 peut-il s'écrire de façon non triviale comme un produit semi-direct ?