Université de Bordeaux

Licence 3 - année 2021-2022
Structures algébriques 2 - 4TMFF502U

Devoir maison n°2

À rendre le 23 novembre

Exercice 1

Posons $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{5} \in \mathbf{R}$.
(1) Montrer que $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\alpha)$.
(2) En déduire que $\mathbf{Q}(\alpha) = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5})$.
(3) Calculer $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]$.
(4) Montrer que le polynôme $X^3 - 5$ est irréductible dans $\mathbf{Q}(\sqrt{2})[X]$.
(5) Calculer le polynôme minimal de α sur $\mathbf{Q}$.

Exercice 2

Soient p un nombre premier et $\mathbf{F}_p$ le corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
(1) Combien existe-t-il de polynômes unitaires réductibles de degré 2 dans $\mathbf{F}_p[X]$?
(2) Montrer qu'il existe un corps de cardinal p^2.

Exercice 3

Posons $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{7}} \in \mathbf{C}$.
(1) Montrer que ζ est algébrique sur $\mathbf{Q}$ et déterminer $[\mathbf{Q}(\zeta) : \mathbf{Q}]$.
(2) Déterminer le polynôme minimal de $\alpha := \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$ sur $\mathbf{Q}$ (indication : on pourra poser $\beta = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6$, et calculer $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$).
(3) Montrer que $\mathbf{Q}(\alpha) = \mathbf{Q}(i\sqrt{7})$.
(4) Posons $\gamma = \zeta + \zeta^6$. Expliquer pourquoi $\gamma \in \mathbf{R}$ puis pourquoi $[\mathbf{Q}(\zeta) : \mathbf{Q}(\gamma)] = 2$.
(5) Déterminer le polynôme minimal de γ sur $\mathbf{Q}$.