Université de Bordeaux

Licence 3 - année 2022-2023
Structures algébriques 2 - 4TMFF502U

Devoir maison n°2

À rendre le 29 novembre

Exercice 1

(1) Montrer que $[\mathbf{Q}(\sqrt[5]{2}) : \mathbf{Q}] = 5$.
(2) Expliquer pourquoi $\mathbf{Q}(\sqrt[5]{4}) = \mathbf{Q}(\sqrt[5]{2})$.
(3) En déduire que le polynôme $X^5 - 4$ est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.

Exercice 2

Soit L/K une extension finie de degré d. Si $\alpha \in L$, on note $m_\alpha \colon L \to L$ l'application donnée par $x \mapsto \alpha x$. Elle est K-linéaire : on note $\chi_{\alpha,L/K}$ son polynôme caractéristique, $\mathsf{Tr}_{L/K}(\alpha)$ sa trace.
(1) Montrer que $P_{\alpha,K}$ divise $\chi_{\alpha,L/K}$ dans $K[X]$. À quelle condition sur $K(\alpha)$ a-t-on égalité ?
(2) Montrer que l'application $\mathsf{Tr}_{L/K} \colon L \to K$ est K-linéaire.
(3) Supposons que $\deg_K(\alpha) = d$: écrivons $P_{\alpha,K}(X) = X^d + a_1 X^{d-1} + \cdots + a_d \in K[X]$. Exprimer $\mathsf{Tr}_{L/K}(\alpha)$ en fonction de $a_1, \ldots, a_d$.
(4) Que vaut $\mathsf{Tr}_{L/K}(\alpha)$ lorsque $\alpha \in K$?
On suppose désormais que $K = \mathbf{Q}$ et $L = \mathbf{Q}(\alpha)$ avec $\alpha = \sqrt[5]{2}$.
(5) En s'inspirant de l'exercice 1 et en utilisant la question (3), montrer que $\mathsf{Tr}_{L/K}(\alpha^i) = 0$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
(6) Expliquer pourquoi $\sqrt{3} \notin L$.
Supposons que $\sqrt[5]{3} \in L$.
(7) Montrer que $\mathsf{Tr}_{L/K}\left(\sqrt[5]{3}\alpha^i\right) = 0$ pour tout $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
(8) Utiliser le résultat de la question précédente pour calculer les coordonnées de $\sqrt[5]{3}$ dans la base $(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4)$ de L sur K.
(9) En déduire une contradiction et conclure.