université de BORDEAUX	ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020 / 2021 Session 1 d'automne **PARCOURS / ÉTAPE : 4TMA903U** **Code UE : 4TTN901S, 4TTN901S** **Épreuve :** Structures algébriques 2 **Date :** 14/11/2020 **Heure :** 14h **Durée :** 1h30 Documents et équipements électroniques non autorisés Épreuve de Mr Brinon	**Collège Sciences et technologies**

La qualité de la rédaction sera un facteur d'évaluation important.

Exercice 1

Déterminer les idéaux premiers de $A = \mathbf{Z}[X,Y]/\langle 6, (X-1)^2, Y^6\rangle$.

Exercice 2

Soient $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et p premier impair.
(1) Montrer que le polynôme $X^n - p$ est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.
(2) Montrer que p est soit irréductible, soit le produit de deux éléments irréductibles non associés dans $\mathbf{Z}[i]$ [indication : on pourra utiliser le stathme $N\colon \mathbf{Z}[i] \to \mathbf{N};\ z \mapsto |z|^2$ ou bien l'isomorphisme $\mathbf{Z}[X]/\langle X^2+1\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}[i]$]. En déduire que $X^n - p$ est irréductible dans $\mathbf{Q}(i)[X]$.

Exercice 3

Posons $A = \mathbf{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle$. On note x et y les images de X et de Y dans A.
(1) Montrer que A est intègre.
(2) Montrer que l'unique morphisme $\mathbf{R}[Y] \to A$ qui envoie tout réel sur (la classe de) lui-même et Y sur y est injectif. Il induit donc un isomorphisme $\mathbf{R}[Y] \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}[y] \subset A$.
(3) Montrer que $A = \mathbf{R}[y] \oplus \mathbf{R}[y]x$. Tout élément de A s'écrit donc de façon unique sous la forme $P(y) + Q(y)x$ avec $P(y), Q(y) \in \mathbf{R}[y]$.
(4) Si $\alpha = P(y) + Q(y)x$, on pose $\overline{\alpha} = P(y) - Q(y)x$. Montrer que $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ est un automorphisme de l'anneau A.
(5) Montrer que pour tout $\alpha \in A$, on a $N(\alpha) := \alpha\overline{\alpha} \in \mathbf{R}[y]$, puis que $N\colon A \to \mathbf{R}[y]$ est multiplicative (*i.e.* que $N(\alpha_1\alpha_2) = N(\alpha_1)N(\alpha_2)$).
(6) Montrer que $\alpha \in A^\times \Leftrightarrow N(\alpha) \in \mathbf{R}^\times$.
(7) Montrer que si $\alpha = P(y) + Q(y)x$ avec $P(y), Q(y) \in \mathbf{R}[y]$, on a

$$\deg(N(\alpha)) = 2\max\{\deg(P), \deg(Q)+1\}$$

(on rappelle que $\deg(0) = -\infty$). En déduire que x est irréductible dans A.
(8) Décrire $A/\langle x\rangle$ et en déduire que A n'est pas factoriel.