université de BORDEAUX

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2021 / 2022
SESSION 1 D'AUTOMNE
PARCOURS / ÉTAPE : 4TMA903U
Code UE : 4TTN901S, 4TTN901S
Épreuve : Structures algébriques 2
Date : 25/10/2021 Heure : 9h30 Durée : 1h30
Documents et équipements électroniques non autorisés
Épreuve de Mr Brinon

Collège Sciences et technologies

La qualité de la rédaction sera un facteur d'évaluation important.

Exercice 1

(1) Montrer que dans un anneau intègre, un élément premier est irréductible.
(2) Montrer que l'idéal $\langle X, Y\rangle$ (engendré par X et Y) n'est pas principal dans $\mathbf{Q}[X, Y]$.
(3) Quels sont les idéaux premiers de $\mathbf{Z}/120\,\mathbf{Z}$?

Exercice 2

Posons $A = \left\{a + ib\sqrt{3}\right\}_{a,b\in\mathbf{Z}} \subset \mathbf{C}$.

(1) En construisant soigneusement un isomorphisme $\mathbf{Z}[X]/\langle X^2 + 3\rangle \xrightarrow{\sim} A$, montrer que A est un sous-anneau de $\mathbf{C}$.
(2) Expliquer pourquoi le corps des fractions de A est $K = \left\{a + ib\sqrt{3}\right\}_{a,b\in\mathbf{Q}}$.
(3) Pour $z \in \mathbf{C}$, on pose $N(z) = |z|^2$. Montrer que pour tout $z \in A$, on a $N(z) \in \mathbf{N}$, et que A ne contient pas d'élément z tel que $N(z) = 2$.
(4) En utilisant N, montrer que $A^\times = \{\pm 1\}$.
(5) Notons $I = \langle 2, 1 + i\sqrt{3}\rangle$ l'idéal de A engendré par 2 et $1 + i\sqrt{3}$. Montrer que I est maximal dans A.
(6) Supposons I principal : écrivons $I = \langle \alpha\rangle$.
 (i) Montrer que $N(\alpha) \mid 4$, puis que $N(\alpha) = 4$.
 (ii) En déduire que α est associé à 2 ainsi qu'à $1 + i\sqrt{3}$ dans A.
 (iii) Conclure que I ne peut pas être principal.
(7) Posons $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \in \mathbf{C}$ et $B = \left\{a + bj\right\}_{a,b\in\mathbf{Z}} \subset \mathbf{C}$ (on ne demande pas de justifier que B est un sous-anneau de $\mathbf{C}$). Montrer que l'anneau B est euclidien, muni du stathme N (indication : s'inspirer de la preuve vue pour $\mathbf{Z}[i]$).
(8) Déterminer $B^\times$.
(9) L'entier 5 est-il irréductible dans B ? Et 7 ?