

	<b>ANNÉE UNIVERSITAIRE 2021 / 2022</b> SESSION 1 D'AUTOMNE <b>PARCOURS / ÉTAPE : 4TMA903U</b> <b>Code UE : 4TTN901S, 4TTN901S</b> <b>Épreuve : Structures algébriques 2</b> <b>Date : 24/10/2022    Heure : 11h    Durée : 1h30</b> Documents et équipements électroniques non autorisés Épreuve de Mr Brinon	Collège Sciences et technologies

*La qualité de la rédaction sera un facteur d'évaluation important.*

### Question de cours

Énoncer et démontrer le théorème de Lagrange.

#### Exercice 1

Soit  $G$  un groupe d'ordre 33 agissant sur un ensemble de cardinal 19. Montrer qu'il y a au moins un point fixe.

#### Exercice 2

Soit  $G$  un groupe *simple* d'ordre 180. On note  $e$  son élément neutre et pour  $p$  premier,  $n_p$  le nombre de  $p$ -Sylow de  $G$ .

- (1) Factoriser 180 en produit de puissances de nombres premiers.
- (2) Supposons que  $n_5 = 6$ .
  - (i) Montrer que l'action naturelle de  $G$  sur l'ensemble des ses 5-Sylow fournit un morphisme injectif  $\rho: G \rightarrow \mathfrak{S}_6$ .
  - (ii) En considérant le morphisme composé  $\varepsilon \circ \rho$  (où  $\varepsilon$  est la signature), montrer que  $\rho(G) \subset \mathfrak{A}_6$ .
  - (iii) En déduire une contradiction (considérer l'indice  $(\mathfrak{A}_6 : \rho(G))$ ).
  - (iv) En déduire que  $n_5 = 36$ .
- (3) Vérifier qu'un groupe d'ordre 18 admet un unique 3-Sylow.
- (4) Montrer que  $n_3 = 10$ .
- (5) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux 3-Sylow distincts,  $g \in S_1 \cap S_2$  et  $C(g) = \{\gamma \in G; g\gamma = \gamma g\}$  le centralisateur de  $g$  dans  $G$ .
  - (i) Rappeler pourquoi tout groupe d'ordre 9 est abélien. En déduire que  $S_i \subset C(g)$  pour  $i \in \{1, 2\}$ .
  - (ii) En utilisant la question (3), en déduire que  $(G : C(g)) \in \{1, 2, 4, 5\}$  (on pourra montrer que 9 divise strictement l'ordre de  $C(g)$ ).
  - (iii) Conclure que  $C(g) = G$ , puis que  $g = e$ .
- (6) En comptant le nombre d'éléments d'ordre 5 et le nombre d'éléments d'ordre divisant 9, conclure à une contradiction.
- (7) Qu'en déduit-on ?