

	ANNÉE UNIVERSITAIRE 2023 / 2024 SESSION 1 D'AUTOMNE PARCOURS / ÉTAPE : 4TMA903U Code UE : 4TTN901S, 4TTN901S Épreuve : Structures algébriques 2 Date : 23/10/2023 Heure : 11h Durée : 1h30 Documents et équipements électroniques non autorisés Épreuve de M. Brinon	Collège Sciences et technologies

La qualité de la rédaction sera un facteur d'évaluation important.

Questions de cours

- (1) Soient p un nombre premier, G un p -groupe agissant sur un ensemble fini X . Montrer que $\#X \equiv \#X^G \pmod{p}$, où X^G désigne l'ensemble des points fixes pour l'action.
- (2) Montrer que tout groupe d'ordre p^2 est abélien.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$.

- (1) Combien y a-t-il de n -cycles dans \mathfrak{S}_n ?
- (2) En déduire le nombre de sous-groupes engendrés par un n -cycle dans \mathfrak{S}_n .

Exercice 2

Soit G un groupe *simple* d'ordre 400. On note e son élément neutre et pour p premier, n_p le nombre de p -Sylow de G .

- (1) Factoriser 400 en produit de puissances de nombres premiers.
- (2) Expliquer pourquoi on a nécessairement $n_5 = 16$.

On note S_1, \dots, S_{16} les 5-Sylow de G .

- (3) Dans cette question, on suppose que $i \neq j \Rightarrow S_i \cap S_j = \{e\}$.

(a) Dénombrer l'ensemble $E = \bigcup_{k=1}^{16} S_k \setminus \{e\}$.

(b) Si Σ est un 2-Sylow de G , montrer que $\Sigma \subset G \setminus E$.

(c) En déduire que $n_2 = 1$, puis une contradiction.

D'après la question précédente, on peut supposer, quitte à renuméroter, que le sous-groupe $H := S_1 \cap S_2$ n'est pas réduit à l'élément neutre. On note G' le sous-groupe de G engendré par S_1 et S_2 .

- (4) Quel est l'ordre de H ?
- (5) Expliquer pourquoi H est distingué dans S_1 et dans S_2 [indication : penser à la question de cours]. En déduire que H est distingué dans G' .
- (6) Quel est le nombre de 5-Sylow de G' ? En déduire que $G' = G$.
- (7) Qu'en déduit-on ?