université de BORDEAUX

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2021 / 2022
SESSION 1 D'AUTOMNE
PARCOURS / ÉTAPE : 4TMA903U
Code UE : 4TTN901S, 4TTN901S
Épreuve : Structures algébriques 2
Date : 13/12/2021 Heure : 14h30 Durée : 3h
Documents et équipements électroniques non autorisés
Épreuve de Mr Brinon

Collège Sciences et technologies

La qualité de la rédaction sera un facteur d'évaluation important.

Questions de cours

(1) Montrer que l'idéal $\langle 2, X\rangle$ (engendré par 2 et X) n'est pas principal dans $\mathbf{Z}[X]$.
(2) Soit A anneau factoriel. Rappeler la définition du contenu $\mathsf{c}(P)$ d'un polynôme $P \in A[X]\backslash\{0\}$, et montrer que si $Q \in A[X]\backslash\{0\}$, on a $\mathsf{c}(PQ) = \mathsf{c}(P)\,\mathsf{c}(Q)$.
(3) Montrer que le polynôme $X^6 + X^3 + 1$ est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.
(4) Soient Ω/K une extension et L_1/K et L_2/K des sous-extensions finies. Montrer que L_1L_2/K est finie et que $[L_1L_2 : K] \leqslant [L_1 : K][L_2 : K]$.
(5) Les extensions $\mathbf{Q}(\sqrt{2})/\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Q}(\sqrt{3})/\mathbf{Q}$ sont-elles isomorphes ?

Exercice 1

Soient $\lambda \in \mathbf{C}$ et $A := \mathbf{C}[X, Y]/\langle X^2 + Y^2 + \lambda\rangle$.
(1) Montrer que A est intègre si et seulement si $\lambda \neq 0$.
(2) Quand A est-il un corps ?

Exercice 2

(1) Soient A un anneau euclidien, et $\phi\colon A\backslash\{0\} \to \mathbf{N}$ un stathme euclidien. Supposons en outre que A n'est pas un corps.
   (a) Justifier l'existence de $x \in E := A\backslash(\{0\} \cup A^\times)$ tel que $\phi(x) = \min\limits_{y\in E} \phi(y)$.
   (b) Notons $\pi\colon A \to A/\langle x\rangle$ la surjection canonique. Montrer que $\pi(\{0\} \cup A^\times) = A/\langle x\rangle$.

Posons $\theta = \frac{1+i\sqrt{19}}{2} \in \mathbf{C}$ et $A = \{a + b\theta\}_{a,b\in\mathbf{Z}}$.
(2) Calculer le polynôme minimal P de θ sur $\mathbf{Q}$.
(3) Construire un isomorphisme $\mathbf{Z}[X]/\langle P\rangle \xrightarrow{\sim} A$.

Si $z \in \mathbf{Q}(\theta)$, on pose $N(z) = |z|^2$ (où $|z|$ désigne le module du nombre complexe z).
(4) Montrer que l'application N est multiplicative, et que $N(A) \subset \mathbf{N}$.
(5) Montrer que $A^\times = \{\pm 1\}$.
(6) Supposons A euclidien.
   (a) En utilisant la question (1), montrer qu'il existe $x \in A$ tel que $A/\langle x\rangle$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.
   (b) Montrer que cela implique que P a une racine dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, et en déduire une contradiction.
(7) Montrer que l'idéal $2A$ est maximal dans A.
(8) Soient $a \in A$ et $b \in A\backslash\{0\}$. Posons $z = \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}(\theta)$. Écrivons $z = x + y\theta$ avec $x, y \in \mathbf{Q}$, notons v l'entier le plus proche de y, et posons $y' = y - v$ (on a donc $|y'| \leqslant \frac{1}{2}$).

(a) Supposons $|y'| \leqslant \frac{1}{3}$ et notons u l'entier le plus proche de $x + \frac{y-v}{2}$. Montrer que $N(z - (u + v\theta)) < 1$. En déduire qu'il existe $q, r \in A$ avec $N(r) < N(b)$, tels que $a = bq + r$.

(b) Supposons $\frac{1}{3} < |y'| \leqslant \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $v'' \in \mathbf{Z}$ tel que $|2y - v''| < \frac{1}{3}$. En déduire qu'il existe $q, r \in A$ avec $N(r) < N(b)$, tels que $2a = bq + r$.

(9) Montrer que A est principal [indication : si $I \subset A$ est un idéal non nul, on considérera un élément de norme minimale dans $I \backslash \{0\}$].

Exercice 3

Soit $\alpha = i\sqrt{2} + \sqrt[4]{3} \in \mathbf{C}$.
(1) Montrer que $i\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\alpha)$.
(2) En déduire que $\mathbf{Q}(\alpha) = \mathbf{Q}(i\sqrt{2}, \sqrt[4]{3})$.
(3) Calculer $[\mathbf{Q}(\sqrt[4]{3}) : \mathbf{Q}]$, puis $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]$.
(4) Expliquer pourquoi le polynôme $X^4 - 3$ est irréductible dans $\mathbf{Q}(i\sqrt{2})[X]$.
(5) Calculer le polynôme minimal de α sur $\mathbf{Q}$.

Exercice 4

On note $\zeta \in \mathbf{C}$ une racine primitive 11-ième de l'unité.
(1) Quel est le polynôme minimal de ζ sur $\mathbf{Q}$? Que vaut $[\mathbf{Q}(\zeta) : \mathbf{Q}]$?
(2) Soit $\gamma = \cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)$. Déterminer le polynôme minimal de ζ sur $\mathbf{Q}(\gamma)$.
(3) En déduire $[\mathbf{Q}(\gamma) : \mathbf{Q}]$. Quel est le polynôme minimal de γ sur $\mathbf{Q}$?
Posons $A = \left\{x + i\sqrt{11}y\right\}_{x,y \in \mathbf{Z}} \subset \mathbf{C}$. Pour $z \in A$, on pose $N(z) = |z|^2$.
(4) Montrer que $N(z) \in \mathbf{N}$ et déterminer $A^\times$.
(5) Montrer que 2 est irréductible dans A et calculer $(1 + i\sqrt{11})(1 - i\sqrt{11})$. L'anneau A est-il factoriel ?
(6) Posons $\alpha = \frac{1+i\sqrt{11}}{2}$. Calculer le polynôme minimal de α sur $\mathbf{Q}$.
(7) Montrer que $B = \{x + y\alpha\}_{x,y \in \mathbf{Z}}$ est euclidien.

Exercice 5

(1) Quels sont les polynômes irréductibles de degré 2 dans $\mathbf{F}_2[X]$?
(2) Expliciter un polynôme $P \in \mathbf{F}_2[X]$ tel que $\mathbf{F}_{16} \simeq \mathbf{F}_2[X]/\langle P \rangle$ (il y a trois réponses possibles, on n'en demande qu'une seule).