université de BORDEAUX

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2022 / 2023
SESSION 1 D'AUTOMNE
PARCOURS / ÉTAPE : 4TMA903U
Code UE : 4TTN901S, 4TTN901S
Épreuve : Structures algébriques 2
Date : 15/12/2022 Heure : 14h30 Durée : 3h
Documents et équipements électroniques non autorisés
Épreuve de Mr Brinon

Collège Sciences et technologies

La qualité de la rédaction sera un facteur d'évaluation important.

Exercices préliminaires

(1) Soit G un groupe fini. Pour chaque nombre premier p divisant $\#G$, soit S_p un p-Sylow de G. Montrer que G est engendré par $\bigcup_p S_p$.
(2) Énoncer et démontrer le critère d'Eisenstein sur $\mathbf{Z}$.
(3) Montrer que le polynôme $X^6 + X^3 + 1$ est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.

Exercice 1

Soient $q < p$ deux nombres premiers et G un groupe d'ordre p^2q^2. On suppose que G est simple, et on note e son élément neutre.
(1) Montrer que l'ensemble $\mathsf{Syl}_p(G)$ des p-Sylow de G a q^2 éléments.
(2) Supposons que pour tous $S, S' \in \mathsf{Syl}_p(G)$, on a $S \cap S' = \{e\}$. Dénombrer l'ensemble des éléments de G dont l'ordre divise q^2, et en déduire une contradiction.

Il existe donc $S, S' \in \mathsf{Syl}_p(G)$ distincts et tels que $H := S \cap S' \neq \{e\}$.
(3) Expliquer pourquoi S et S' sont abéliens. En déduire que S et S' sont des sous-groupes du normalisateur $\mathsf{N}_G(H) = \{g \in G\,;\, gHg^{-1} = H\}$.
(4) Déterminer le nombre de p-Sylow de $\mathsf{N}_G(H)$.
(5) En déduire que $\mathsf{N}_G(H) = G$, puis une contradiction.
(6) Que peut-on en conclure ?

Exercice 2

Désignons par α le réel $\sqrt{1+\sqrt{3}}$.
(1) Trouver le polynôme minimal P de α sur $\mathbf{Q}$. Que vaut $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]$?
(2) Prouver que $K = \mathbf{Q}(\alpha, i\sqrt{2})$ est un corps de décomposition de $P \in \mathbf{Q}[X]$.
(3) Calculer le degré de K sur $\mathbf{Q}$.

Exercice 3

On pose $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{7}} \in \mathbf{C}$.
(1) Quel est le polynôme minimal de ζ sur $\mathbf{Q}$? Que vaut $[\mathbf{Q}(\zeta) : \mathbf{Q}]$?
(2) Soit $\gamma = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$. Déterminer le polynôme minimal de ζ sur $\mathbf{Q}(\gamma)$.
(3) En déduire $[\mathbf{Q}(\gamma) : \mathbf{Q}]$. Quel est le polynôme minimal de γ sur $\mathbf{Q}$?
(4) Posons $\alpha = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$. Déterminer le polynôme minimal de α sur $\mathbf{Q}$.
(5) En déduire que α n'est pas réel. Quelles sont les valeurs de $\alpha + \overline{\alpha}$ et $|\alpha|^2$?

Posons $A = \left\{x + i\sqrt{7}y\right\}_{x,y\in\mathbf{Z}}$ et $B = \{x + y\alpha\}_{x,y\in\mathbf{Z}} \subset \mathbf{C}$. Pour $z \in B$, on pose $N(z) = |z|^2$.

(6) Montrer que A et B sont des sous-anneaux de $\mathbf{Q}(\zeta)$ et que $A \subset B$.
(7) Montrer que si $z \in B$, on a $N(z) \in \mathbf{N}$, puis déterminer $B^\times$ et $A^\times$.
(8) Montrer que 2 est irréductible dans A, mais pas premier. L'anneau A est-il factoriel ?
(9) Montrer que B est euclidien.

Exercice 4

(1) Quels sont les polynômes irréductibles de degré 2 dans $\mathbf{F}_2[X]$?

Posons $P(X) = X^5 + X^2 + 1 \in \mathbf{F}_2[X]$, et fixons une clôture algébrique $\overline{\mathbf{F}}_2$ de $\mathbf{F}_2$.

(2) Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $X^2 + X + 1$, puis expliquer pourquoi le polynôme $P(X)$ est irréductible dans $\mathbf{F}_2[X]$.
(3) Soit $\alpha \in \overline{\mathbf{F}}_2$ une racine de P. Montrer que α est un générateur de $\mathbf{F}_{32}^\times$.
(4) Quel est le polynôme minimal de α^2 sur $\mathbf{F}_2$?
(5) Quel est le degré du polynôme minimal de α^3 sur $\mathbf{F}_2$?
(6) Expliquer pourquoi le polynôme $X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbf{F}_{32}[X]$.