université de BORDEAUX	ANNÉE UNIVERSITAIRE 2023 / 2024 SESSION 1 D'AUTOMNE **PARCOURS / ÉTAPE :** 4TMA903U **Code UE :** 4TTN901S, 4TTN901S **Épreuve :** Structures algébriques 2 **Date :** 19/12/2022 **Heure :** 14h30 **Durée :** 3h Documents et équipements électroniques non autorisés Épreuve de Mr Brinon	**Collège Sciences et technologies**

La qualité de la rédaction sera un facteur d'évaluation important.

Exercices préliminaires

(1) Soit $n \geqslant 5$ un entier. Quel est le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ engendré par les 5-cycles ?
(2) Montrer que tout anneau euclidien est principal.
(3) Montrer que le polynôme $X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.
(4) Énoncer et démontrer le théorème de la base télescopique.

Exercice 1

Soient p et q deux nombres premiers et G un groupe d'ordre p^3q. On note n_p et n_q le nombre de p-Sylow et de q-Sylow de G respectivement. On suppose que $n_p > 1$ et $n_q > 1$.

(1) Expliquer pourquoi $p \neq q$.
(2) Montrer que $n_q > q = n_p > p$, et en déduire que $n_q \in \{p^2, p^3\}$.
(3) Supposons que $n_q = p^3$.
 (a) Notons E l'ensemble des éléments d'ordre q dans G. Calculer $\#E$.
 (b) Expliquer pourquoi cela contredit l'hypothèse $n_p > 1$.
(4) On a donc $n_q = p^2$. Montrer que $q = p + 1$.
(5) En déduire que $\#G = 24$.
(6) *Notons X l'ensemble des 3-Sylow de G (d'après ce qui précède, on a $\#X = 4$). Si $S \in X$, on note $\mathsf{N}_G(S)$ son normalisateur dans G, et on pose $K = \bigcap_{S \in X} \mathsf{N}_G(S)$, c'est un sous-groupe distingué de G.
 (a) Si $S \in X$, que vaut $\# \mathsf{N}_G(S)$?
 (b) Si $S, S' \in X$ sont distincts, montrer que 3 ne divise pas $\#(\mathsf{N}_G(S) \cap \mathsf{N}_G(S'))$. En déduire que $\#K \in \{1, 2\}$.
 (c) Supposons $\#K = 2$. Montrer que G/K a quatre 3-Sylow, puis un unique 2-Sylow, et que cela contredit l'hypothèse $n_2 > 1$.
 (d) On a donc $\#K = 1$. En interprétant K comme le noyau d'un morphisme de groupes convenable, en déduire que $G \simeq \mathfrak{S}_4$.

Exercice 2

Posons $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} \in \mathbf{C}$ et $A = \mathbf{Z}[j] = \{a + bj\}_{a,b \in \mathbf{Z}} \subset \mathbf{C}$.

(1) Construire soigneusement un isomorphisme d'anneaux $\mathbf{Z}[X]/(X^2 + X + 1) \xrightarrow{\sim} A$.
(2) Prouver que A est euclidien (utiliser l'application $N\colon\ \mathbf{C} \to \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ définie par $N(z) = |z|^2$).
(3) Soit $p > 3$ un nombre premier. Montrer que p est irréductible dans A si et seulement si -3 n'est pas un carré modulo p.
(4) Factoriser 3 en produit d'irréductibles dans A.

---

*. Plus difficile.

Exercice 3

On pose $\alpha = \sqrt[5]{2} \in \mathbf{R}_{>0}$ et $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{5}} \in \mathbf{C}$.
(1) Quel est le polynôme minimal de ζ sur $\mathbf{Q}$? Que vaut $[\mathbf{Q}(\zeta) : \mathbf{Q}]$?
(2) En considérant $\gamma = \frac{\zeta+\zeta^{-1}}{2}$, montrer que $\sqrt{5} \in \mathbf{Q}(\zeta)$.
(3) Quel est le polynôme minimal P de α sur $\mathbf{Q}$? En déduire $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]$.
(4) Expliciter une base de $\mathbf{Q}(\alpha)$ sur $\mathbf{Q}$. Que vaut $[\mathbf{Q}(\alpha^2) : \mathbf{Q}]$? En déduire que le polynôme $X^5 - 4$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$.
(5) Expliquer pourquoi $K := \mathbf{Q}(\zeta, \alpha)$ est le corps de décomposition de P dans $\mathbf{C}$.
(6) Que vaut $[K : \mathbf{Q}]$?
(7) Quel est le polynôme minimal de ζ sur $\mathbf{Q}(\alpha, \sqrt{5})$?
(8) Expliquer pourquoi $5\sqrt[5]{2} + 2\sqrt{5} - 14\frac{\sqrt[5]{8}}{\sqrt{5}} \notin \mathbf{Q}$.

Exercice 4

Soit Ω une clôture algébrique de $\mathbf{F}_3$. Si $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on note $\mathbf{F}_{3^n}$ l'unique sous-corps de cardinal 3^n dans Ω, $\Phi_7 \in \mathbf{Z}[X]$ le 7-ième polynôme cyclotomique et $\overline{\Phi}_7$ son image dans $\mathbf{F}_3[X]$.
(1) Démontrer que $\overline{\Phi}_7$ est séparable.
(2) Expliquer soigneusement pourquoi les racines de $\overline{\Phi}_7$ dans Ω sont les éléments d'ordre 7 dans le groupe multiplicatif $\Omega^\times$.
(3) Soit $\alpha \in \Omega$ une racine de $\overline{\Phi}_7$. À quelle condition sur $n \in \mathbf{N}_{>0}$ a-t-on $\alpha \in \mathbf{F}_{3^n}$?
(4) En déduire $[\mathbf{F}_3(\alpha) : \mathbf{F}_3]$, puis que $\overline{\Phi}_7$ est irréductible sur $\mathbf{F}_3$.
(5) Dessiner le diagramme des sous-corps de $\mathbf{F}_3(\alpha)$.
(6) Posons $\beta = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4 \in \mathbf{F}_3(\alpha)$.
  (a) Expliquer pourquoi $\beta \notin \mathbf{F}_3$.
  (b) Exprimer β^3 en fonction de β.
  (c) Montrer que $\mathbf{F}_3(\beta) = \mathbf{F}_9$.
  (d) Calculer le polynôme minimal de β sur $\mathbf{F}_3$.