université de BORDEAUX	ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020 / 2021 SESSION 2 DE PRINTEMPS **PARCOURS / ÉTAPE : 4TMA903U** **Code UE : 4TTN901S, 4TTN901S** **Épreuve :** Structures algébriques 2 **Date :** 7/6/2021 **Heure :** 14h30 **Durée :** 3h Documents et équipements électroniques non autorisés Épreuve de Mr Brinon	**Collège Sciences et technologies**

La qualité et la précision de la rédaction seront des facteurs d'évaluation importants.

Questions de cours

(1) Montrer que $\mathbf{Z}[X]$ n'est pas principal.
(2) Montrer que $\mathbf{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est pas factoriel.
(3) Montrer que le polynôme $X^{14} + 10X - 6$ est irréductible sur$\mathbf{Q}$.
(4) Soient Ω/K une extension de corps et L/K, M/K deux sous-extensions finies. Montrer que la sous-extension LM/K est finie.

Exercice 1

Quels sont les idéaux, les idéaux premiers et les idéaux maximaux de $\mathbf{Z}/60\,\mathbf{Z}$?

Exercice 2

Soient K un corps et $P, Q \in K[Y]$ non constants et premiers entre eux. Montrer que le polynôme $XP(Y) - Q(Y)$ est irréductible dans $K[X, Y]$ et dans $K(X)[Y]$.

Exercice 3

Posons $A = \mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{x + \sqrt{2}y\,;\, x, y \in \mathbf{Z}\}$. C'est un sous-anneau de $\mathbf{R}$.
(1) Quel est le corps des fractions de A ?
(2) Construire un isomorphisme $\mathbf{Z}[X]/\langle X^2 - 2\rangle \xrightarrow{\sim} A$.
(3) Montrer que l'application $\sigma\colon A \to A$ définie par $\sigma(x + \sqrt{2}y) = x - \sqrt{2}y$ (pour tous $x, y \in \mathbf{Z}$) est un morphisme d'anneaux. En déduire que l'application

$$N\colon A \to \mathbf{N}$$
$$x + \sqrt{2}y \mapsto |x^2 - 2y^2|$$

est multiplicative (*i.e.* telle que $N(z_1z_2) = N(z_1)N(z_2)$ pour tous $z_1, z_2 \in A$).
(4) Montrer que muni du stathme N, l'anneau A est euclidien.
(5) Montrer que $z \in A^\times \Leftrightarrow N(z) = 1$. En déduire que $\alpha := 1 + \sqrt{2} \in A^\times$ et préciser la valeur de α^{-1}.
(6) Dans cette question, on montre que $A^\times = \{\pm\alpha^k\}_{k\in\mathbf{Z}}$. Soit $z = x + \sqrt{2}y \in A^\times$ (avec $x, y \in \mathbf{Z}$). Quitte à multiplier z par -1, on peut supposer que $x \geqslant 0$.

- (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \{\pm1\}$ tel que $z\alpha^\varepsilon = x_1 + \sqrt{2}y_1$ vérifie $x_1 \in \{\pm1\}$ ou $|x_1| < x$ [indication : justifier que $x > 0$ et $|y| \leqslant x$, montrer que $\alpha^\varepsilon = \varepsilon + \sqrt{2}$ et calculer $z\alpha^\varepsilon$, puis traiter les cas $|y| = x$ et $|y| < x$ séparément].
- (b) Conclure en itérant ce qui précède.
- (c) En déduire un isomorphisme de groupes $(\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} A^\times$.

(7) Montrer que 5 est premier dans A, mais que 7 ne l'est pas.

Exercice 4

Posons $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{7}) \subset \mathbf{R}$.

(1) Que vaut $[K : \mathbf{Q}]$?

(2) Donner une base de K vu comme $\mathbf{Q}$-espace vectoriel.

(3) En déduire que le polynôme minimal de $\alpha := \sqrt{2} + \sqrt[3]{7}$ sur $\mathbf{Q}$ n'est pas de degré 2 ou 3.

(4) En déduire que $K = \mathbf{Q}(\alpha)$ et calculer le polynôme minimal de α sur $\mathbf{Q}$.

Exercice 5

(1) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{F}_{27}$ tel que $\mathbf{F}_{27} = \mathbf{F}_3[\alpha]$ et $\alpha^3 = \alpha - 1$.

(2) Montrer que α engendre le groupe multiplicatif $\mathbf{F}_{27}^{\times}$.