université de BORDEAUX	ANNÉE UNIVERSITAIRE 2021 / 2022 SESSION 2 DE PRINTEMPS **PARCOURS / ÉTAPE :** 4TMA903U **Code UE :** 4TTN901S, 4TTN901S **Épreuve :** Structures algébriques 2 **Date :** 10/06/2022 **Heure :** 14h30 **Durée :** 3h Documents et équipements électroniques non autorisés Épreuve de Mr Brinon	**Collège Sciences et technologies**

La qualité de la rédaction sera un facteur d'évaluation important.

Questions de cours

(1) Montrer que $\mathbf{Q}[X, Y]$ n'est pas principal.
(2) Soit A anneau intègre et $\pi \in A$. Montrer que si π est premier, alors π est irréductible dans A.
(3) Donner un exemple d'anneau intègre non factoriel.
(4) Énoncer et prouver le théorème de transitivité des degrés.
(5) Quels sont les sous-corps de $\mathbf{F}_{64}$?

Exercice 1

Soit A un anneau tel que $(\forall a \in A)\,(\exists n \in \mathbf{N}_{>1})\, a^n = a$. Montrer que les idéaux premiers de A sont maximaux.

Exercice 2

Posons $A = \mathbf{Z}\left[i\sqrt{7}\right] = \left\{x + yi\sqrt{7}\right\}_{x,y\in\mathbf{Z}} \subset \mathbf{C}$ et $P(X) = X^2 - X + 2$.
(1) Expliquer pourquoi A est un anneau. Décrire explicitement son corps des fractions K.
(2) Montrer que P est irréductible dans $A[X]$, mais réductible dans $K[X]$.
(3) Montrer que A n'est pas factoriel.

On pose $\theta = \frac{1+i\sqrt{7}}{2} \in \mathbf{C}$, et $B = \mathbf{Z}[\theta] = \{x + y\theta\}_{x,y\in\mathbf{Z}}$.

(4) Quel est le corps des fractions de B ?

Si $z \in \mathbf{C}$, on pose $N(z) = |z|^2 = z\overline{z}$.

(5) Montrer que N est multiplicative et que $N(B) \subset \mathbf{N}$.
(6) Déterminer $B^\times$.
(7) Montrer que B est principal.
(8) Construire soigneusement un isomorphisme $\mathbf{Z}[X]/\langle P(X)\rangle \xrightarrow{\sim} B$.
(9) Si p est un nombre premier, décrire B/pB en précisant s'il est non intègre ou non réduit [indication : on s'intéressera au discriminant de P, et on discutera suivant que -7 est un carré modulo p ou non, en traitant les cas $p = 2$ et $p = 7$ séparément].
(10) Donner la décompositon de 66 en produit d'éléments irréductibles dans B.
(11) Calculer le pgcd de 2 et 7 dans B, puis de $1 + 2\theta$ et $-1 + 3\theta$.

Exercice 3

Soient $j \in \mathbf{C}$ une racine primitive 3-ième de l'unité et $\alpha = j + \sqrt{2} \in \mathbf{C}$.
(1) Quel est le polynôme minimal de j sur $\mathbf{Q}$? Que vaut $[\mathbf{Q}(j) : \mathbf{Q}]$?
(2) Montrer que $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\alpha)$.
(3) En déduire que $\mathbf{Q}(\alpha) = \mathbf{Q}(j, \sqrt{2})$.
(4) Calculer $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]$.
(5) Quel est le polynôme minimal de j sur $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$?
(6) Calculer le polynôme minimal de α sur $\mathbf{Q}$.

Exercice 4

(1) Montrer que le polynôme $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbf{F}_2[X]$.

On a donc $\mathbf{F}_2[X]/\langle X^4 + X^3 + X^2 + X + 1\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbf{F}_{16}$. On note $\alpha \in \mathbf{F}_{16}$ une racine de $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

(2) Quels sont les sous-corps de $\mathbf{F}_{16}$?
(3) L'élément α est-il un générateur du groupe multiplicatif $\mathbf{F}_{16}^\times$?
(4) Combien le groupe $\mathbf{F}_{16}^\times$ a-t-il de générateurs ? Quels sont les polynômes minimaux sur $\mathbf{F}_2$ de ces générateurs ?
(5) Montrer que $\beta = \alpha^2 + \alpha$ est un générateur du groupe $\mathbf{F}_{16}^\times$.
(6) Le polynôme $P(X) = X^5 + X^2 + 1$ est-il irréductible dans $\mathbf{F}_2[X]$? Dans $\mathbf{F}_{16}[X]$?

Exercice 5

(1) Prouver sans calcul que les anneaux $A := \mathbf{F}_2[X]/\langle X^3 + X + 1\rangle$ et $B := \mathbf{F}_2[Y]/\langle Y^3 + Y^2 + 1\rangle$ sont isomorphes.
(2) Construire explicitement un isomorphisme $A \xrightarrow{\sim} B$.