Feuille d'exercices n° 1

Groupes : généralités, quotients, groupes symétriques

Exercice 1
On note $S^1 \subset \mathbf{C}$ l'ensemble des complexes de module 1, et $\cdot$ la multiplication complexe.

(1) Montrer que $(S^1, \cdot)$ est un groupe commutatif.

(2) Montrer que $(S^1, \cdot)$ est isomorphe au groupe quotient $(\mathbf{R}/\mathbf{Z}, +)$. *Indication* : considérer l'application $\mathbf{R} \ni t \mapsto e^{2i\pi t} \in S^1$.

Exercice 2 Soit G un groupe. Soient H et K deux sous-groupes de G. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 3
Montrer qu'un groupe dans lequel tout élément est d'ordre au plus 2 est commutatif.

Exercice 4
Soient $n \geqslant 1$ un entier et a un entier. Quel est l'ordre de $\overline{a}$ dans le groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$? Pour $m \geqslant 1$ un troisième entier, déduire de ce qui précède $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$.

Exercice 5
Posons $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $U = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(1) Quel est l'ordre de U dans G ?

(2) Soient $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ et $(q, r) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $a = cq + r$. Calculer $UT^{-q}M$.

(3) En déduire que $\{U, T\}$ engendre G.

(4) Posons $V = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Montrer que $\{U, V\}$ engendre G. Quel est l'ordre de V ?

Exercice 6
Soit G un groupe. On note D le sous-groupe de G engendré par l'ensemble des commutateurs ie l'ensemble $\{aba^{-1}b^{-1}\,;\,(a, b) \in G^2\}$.

(1) Prouver que D est distingué dans G et que G/D est abélien.

(2) Soit H un sous-groupe de G. Montrer que $D \subset H$ si et seulement si H est distingué dans G et G/H est abélien.

Exercice 7
Soit G un groupe. Soient H et K deux sous-groupes finis distingués de G. On suppose que $\#H$ et $\#K$ sont premiers entre eux.

(1) Montrer que pour tout $h \in H$ et $k \in K$, on a $hk = kh$.

(2) Construire un homomorphisme injectif $H \times K \to G$.

Exercice 8
Montrer le deuxième théorème d'isomorphisme du cours.

Exercice 9
Soient G un groupe et H un sous-groupe de G d'indice 2.

(1) Démontrer que H est distingué dans G.

(2) Montrer que pour tout g de G, g^2 appartient à H.

Déduire de ce qui précède - sans utiliser la simplicité de $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geqslant 5$ - que pour tout n, $\mathfrak{A}_n$ n'a pas de sous-groupe d'indice 2 et qu'en particulier $\mathfrak{A}_4$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 6 (résultat cité dans le cours).

Exercice 10
Dresser la liste des groupes, à isomorphismes près, d'ordre inférieur ou égal à 7.

Exercice 11
Montrer que $\mathfrak{S}_9$ contient un élément d'ordre 20, mais aucun d'ordre 18.

Exercice 12
Soient $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$ et H un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ d'indice 2. Démontrer que $H = \mathfrak{A}_n$ (on pourra d'abord prouver que H contient les 3-cycles).

Exercice 13
Déterminer tous les morphismes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbf{C}^*$. En déduire une autre preuve du résultat de l'exercice précédent : si $n > 1$, $\mathfrak{A}_n$ est le seul sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 14
Pour quels entiers n existe-t-il des morphismes surjectifs de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathfrak{S}_{n-1}$?