Feuille d'exercices n° 2

Actions de groupes, produits semi-directs, théorèmes de Sylow

Exercice 1
On suppose que $\mathbf{Z}/35\,\mathbf{Z}$ opère sans point fixe sur un ensemble E de cardinal 53. Quel est le nombre d'orbites pour cette action ?

Exercice 2
Expliquer pourquoi le nombre moyen de points fixes de $\{1, 2, \ldots, n\}$ sous l'action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ vaut exactement 1. Énoncer une généralisation.

Exercice 3
Soit G un groupe fini.

(1) Soit H un sous-groupe strict de G. Montrer que la réunion des conjugués de H est différente de G (on pourra montrer que $\# \bigcup_{g \in G} (gHg^{-1} \backslash \{e\}) \leqslant \#G - \dfrac{\#G}{\#H}$).

(2) En déduire que si G agit transitivement sur un ensemble fini E de cardinal > 1, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x \neq x$ pour tout $x \in E$ (on pourra prendre $a \in E$ et considérer $H = \mathrm{Stab}_G(a)$).

Exercice 4
Soient p un nombre premier et r un entier $\geqslant 1$. Soit G un groupe d'ordre p^r.

(1) Rappeler pourquoi le centre de G est non trivial.

(2) Montrer que G contient un sous-groupe distingué d'ordre p.

(3) Soit $k \in \{0, \ldots, r\}$. Prouver que G contient un sous-groupe distingué d'ordre p^k (on pourra raisonner par récurrence sur r).

Exercice 5
Soient G un groupe fini et H un sous-groupe de G. On suppose que tout diviseur premier de $\#H$ est strictement supérieur à $[G : H]$. Montrer que H est distingué dans G (on pourra faire agir H par translation sur G/H).

Exercice 6
Dans $\mathfrak{A}_4$ on considère $V_4 = \{\mathsf{Id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$ et $H = \langle (1,2,3) \rangle$.

(1) Montrer que V_4 est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_4$.

(2) Montrer que $K = \{\mathsf{Id}, (1,2)(3,4)\}$ est un sous-groupe distingué de V_4 mais n'est pas distingué dans $\mathfrak{A}_4$.

(3) Montrer que $\mathfrak{A}_4 = V_4 \rtimes H$ et déterminer l'action par conjugaison de H sur V_4.

Exercice 7
Soient un groupe G produit semi-direct (interne) $G = N \rtimes H$ et K un sous-groupe de G vérifiant $N \subset K$. Montrer que $K = N \rtimes (K \cap H)$.

Exercice 8

(1) Soit p un nombre premier. Déterminer $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z})$.

(2) Exhiber deux produits semi-directs $\mathbf{Z}/3\,\mathbf{Z} \rtimes_\phi \mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/3\,\mathbf{Z} \rtimes_\psi \mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z}$ non isomorphes.

(3) Exhiber deux produits semi-directs $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z} \rtimes_\phi \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z} \rtimes_\psi \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ non directs et non isomorphes.

Exercice 9

(1) Soit un produit semi-direct $G = N \rtimes_\phi H$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Le produit $N \rtimes_\phi H$ est direct ;

(ii) Le morphisme ϕ est trivial ;

(iii) Le sous-groupe $\{e_N\} \times H$ est distingué dans G.

(2) Montrer qu'un produit semi-direct $N \rtimes_\phi H$ est abélien si et seulement si N et H sont abéliens et le produit est direct.

Exercice 10

(1) Quels sont les groupes abéliens finis simples ?

(2) Existe-t-il des groupes abéliens infinis simples ?

(3) Soit p un nombre premier. Quels sont les p-groupes simples ?

Exercice 11

Soit m un entier naturel impair. Soient G un groupe d'ordre $2m$ et $g \in G$ d'ordre 2.

(1) Montrer que l'application $\sigma_g : G \to G$ qui à x associe gx est une permutation impaire de G.

(2) En déduire que G contient un sous-groupe d'indice 2.

(3) Montrer que G n'est pas simple si $m > 1$.

Exercice 12

Soit G un groupe infini admettant un sous-groupe strict H d'indice fini. Montrer que G n'est pas simple (on pourra faire agir G par translation sur G/H).

Exercice 13

Soient p et q deux nombres premiers tels que $p < q$ et G un groupe d'ordre pq.

(1) Le groupe G est-il simple ?

(2) Démontrer que G est isomorphe à un produit semi-direct $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

(3) Montrer que ce produit est direct si p ne divise pas $q - 1$.

(4) Soient $q > 2$ un nombre premier et G un groupe d'ordre $2q$. Montrer que G est isomorphe à $\mathbf{Z}/2q\mathbf{Z}$ ou à D_{2q}.

Exercice 14

Soient p, q, r trois nombres premiers vérifiant $p < q < r$ et G un groupe d'ordre pqr. Pour $s \in \{p, q, r\}$ on note n_s le nombre de s-Sylow de G.

(1) Montrer que $pqr \geqslant n_p(p-1) + n_q(q-1) + n_r(r-1) + 1$.

(2) Montrer que si $n_p \neq 1$ alors $n_p \geqslant q$, que si $n_q \neq 1$ alors $n_q \geqslant r$ et que si $n_r \neq 1$ alors $n_r = pq$.

(3) En déduire que G n'est pas simple.

Exercice 15

Soient p et q deux nombres premiers distincts et G un groupe d'ordre p^2q. Montrer que G n'est pas simple (on distinguera les cas $p < q$ et $q < p$).

Exercice 16

Soit G un groupe d'ordre 399.

(1) Montrer que G admet un unique 19-Sylow P qui est distingué dans G.

(2) Soit Q un 7-Sylow. Montrer que $N = PQ$ est un sous-groupe d'ordre 133 de G et que ce groupe est cyclique.

(3) Montrer que Q est distingué dans G (on pourra raisonner par l'absurde et compter les éléments d'ordre 133).

(4) Montrer que $G = NR$, où R est un 3-Sylow. En déduire que G est isomorphe au produit semi-direct d'un groupe cyclique d'ordre 3 par un groupe cyclique d'ordre 133.

Exercice 17

(1) Soit p un nombre premier. Quel est le nombre de p-Sylow du groupe $\mathfrak{S}_p$ (on pourra d'abord dénombrer les éléments d'ordre p) ?

(2) Retrouver le théorème de Wilson.

Exercice 18

Soit G un groupe d'ordre 12. On suppose que l'ensemble des 3-Sylow de G est de cardinal 4. Montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$ (on pourra commencer par construire un morphisme $G \to \mathfrak{S}_4$).

Exercice 19

(1) Soit G un groupe fini simple et p un nombre premier divisant $\#G$. On suppose que G n'est pas un p-groupe et on note n_p le nombre de p-Sylow de G. Montrer que l'action par conjugaison de G sur l'ensemble de ses p-Sylow induit un morphisme injectif de G dans $\mathfrak{S}_{n_p}$ et donc que $n_p! \geqslant \#G$.

(2) Désormais G est un groupe simple de cardinal 60. On veut prouver que G est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.

   (a) Montrer que $n_5 = 6$, $n_3 = 10$ et $n_2 \in \{5, 15\}$. Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 5 et 3 dans G ?

   (b) Dans les questions (b), (c), (d), (e), (f) on suppose que $n_2 = 15$. Montrer qu'il existe deux 2-Sylow de G notés S_1 et S_2 tels que $\#S_1 \cap S_2 = 2$.

   (c) Soit H le sous-groupe de G engendré par S_1 et S_2. Montrer que $S_1 \cap S_2 \subset Z(H)$ et que $\#H \in \{12, 20, 60\}$.

   (d) Montrer que $\#H = 60$ est impossible.

   (e) Supposons maintenant que $\#H = 20$. Montrer que H a un unique 5-Sylow K et que pour l'action par conjugaison de G sur l'ensemble des ses 5-Sylow on a $H \subset \mathrm{Stab}_G(K)$. En déduire que $\#H = 20$ est impossible.

   (f) Supposons que $\#H = 12$. Montrer que H a trois 2-Sylow, S_1, S_2 et un troisième qu'on notera S_3 vérifiant $S_1 \cap S_2 \subset S_3$ et en déduire le nombre d'éléments de H d'ordre 1, 2 ou 4. Montrer que H ne peut pas avoir un unique 3-Sylow (s'inspirer de la question (e)) et en déduire que $\#H = 12$ est également impossible.

   (g) En déduire que $n_2 = 5$ et en faisant agir G par conjugaison sur ses 2-Sylow, montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.