Université de Bordeaux | 2023-2024
Semestre 5 | Structures Algébriques 2

Feuille d'exercices n° 3

Anneaux, idéaux, corps : généralités

Tous les anneaux considérés sont supposés unitaires.

Exercice 1. Soient m et n deux entiers strictements positifs.

(1) Montrer qu'il existe un morphisme d'anneaux de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ si et seulement si m divise n et que dans ce cas, ce morphisme est unique.

(2) On suppose que m divise n. Calculer le noyau du morphisme ci-dessus et en déduire qu'il y a un isomorphisme $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})/(m\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.

Exercice 2 Un anneau $(A, +, \times)$ est dit de Boole si tout $x \in A$ est *idempotent* i.e. vérifie $x^2 = x$. Exemple d'anneau de Boole : si E est un ensemble, $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau de Boole (on ne demande pas de le démontrer).

(1) Soit A un anneau de Boole. Montrer que pour tout $x \in A$ on a $x + x = 0_A$.

(2) En déduire qu'un anneau de Boole est commutatif.

(3) Montrer qu'un anneau de Boole intègre n'a que 2 éléments et est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \times)$.

(4) Un anneau de Boole peut-il avoir 3 éléments ?

(5) On se propose de montrer qu'un anneau de Boole $(A, +, \times)$ fini a pour cardinal une puissance de 2.

   (a) Montrer que si B est un sous-groupe propre de $(A, +)$ et si $a \notin B$, alors $B \cup (a + B)$ est un sous-groupe de $(A, +)$ de cardinal $2|B|$.

   (b) En déduire le résultat annoncé.

Exercice 3. Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Un élément x de A est dit *nilpotent* s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $x^n = 0_A$. Si $x \in A$ est nilpotent, le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $x^n = 0_A$ est appelé l'*indice de nilpotence* de x.

(1) Soient $a, b \in A$ tels que ab soit nilpotent d'indice de nilpotence n. Montrer que ba est nilpotent. Que peut-on dire de son indice de nilpotence m ? *Indication* : on montrera que $|m - n| \leqslant 1$ mais qu'on n'a pas forcément $m = n$.

(2) Soient a et b deux éléments nilpotents de A. On suppose qu'ils commutent i.e. $ab = ba$. Montrer que $a + b$ et ab sont nilpotents. Que peut-on dire de leurs indices de nilpotence (en fonction de ceux de a et b) ? *Indication* : on montrera que si k et l sont les indices de nilpotence de a et b, celui de $a + b$ est inférieur ou égal à $k + l - 1$ et que l'on peut avoir égalité ou non. De même on montrera que celui de ab est inférieur ou égal à $\min(k, l)$ et qu'ici encore on peut avoir égalité ou non.

(3) Le but de cette question est de montrer que si a et b ne commutent pas (donc si A est non commutatif), cette propriété peut être fausse. Trouver un anneau non commutatif A et deux éléments de A nilpotents dont la somme et le produit ne sont pas nilpotents.

(4) Soit $a \in A$ nilpotent. Montrer que $1_A - a$ est inversible et exprimer son inverse sous forme de polynôme en a.

(5) Soient $a, b \in A$ tels que $1_A - ab$ soit inversible. Montrer que $1_A - ba$ est aussi inversible et exprimer son inverse en fonction de celui de $1_A - ab$. *Indication* : on pourra commencer par supposer ab nilpotent.

Exercice 4.

(1) Déterminer les morphismes d'anneaux de $(\mathbf{Z}, +, \times)$ dans lui-même.

(2) Si $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$, on pose $\mathbf{Z}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n};\ a, b \in \mathsf{Z}\}$. Montrer que $\mathbf{Z}[\sqrt{n}]$ est un sous-anneau de $\mathbf{R}$ (muni des lois usuelles).

(3) Quels sont les morphismes d'anneaux de $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ dans lui-même ? Sont-ce des automorphismes ?

(4) Existe-t-il des morphismes d'anneaux de $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$?

(5) Soit f un morphisme de l'anneau $(\mathbf{R}, +, \times)$ dans lui-même.

  (a) Montrer que pour tout x de $\mathbf{Q}$ on a $f(x) = x$.

  (b) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ on a $f(x) \geqslant 0$ et en déduire que f est croissante.

  (c) Déterminer f.

Exercice 5. Soient A un anneau commutatif et I et J deux idéaux de A. On note $I + J$ l'ensemble des $i + j$ où $i \in I$ et $j \in J$, et IJ l'ensemble des sommes finies d'éléments de la forme ij où $i \in I$ et $j \in J$.

(1) Montrer que $I + J$ et IJ sont des idéaux de A.

(2) Montrer que

$$I \cup J \text{ est un idéal de } A \Leftrightarrow I \subseteq J \text{ ou } J \subseteq I \Leftrightarrow I \cup J = I + J.$$

(3) Montrer que $IJ \subseteq I \cap J$ et donner un exemple dans lequel cette inclusion est stricte.

(4) Montrer que si $I + J = A$ alors $IJ = I \cap J$.

(5) Supposons encore que $I + J = A$. Soient p_I et p_J les projections canoniques de A sur A/I et A/J. Soit $f : A \longrightarrow A/I \times A/J$ l'application qui à $x \in A$ associe $(p_I(x), p_J(x))$. Montrer que f est un morphisme d'anneaux qui induit un isomorphisme

$$\frac{A}{IJ} \simeq \frac{A}{I} \times \frac{A}{J}.$$

(6) Ce résultat est une généralisation d'un théorème bien connu. Lequel ? Énoncer une généralisation au produit de n idéaux ($n \geqslant 2$) et la prouver.

Exercice 6. Soient A un anneau commutatif et $\mathcal{N}(A)$ l'ensemble de ses éléments nilpotents.

(1) Montrer que $\mathcal{N}(A)$ est un idéal de A. On l'appelle le *nilradical* de A.

(2) Soit I un idéal de A. On pose

$$\sqrt{I} = \Big\{x \in A;\ \exists\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \text{ tel que } x^n \in I\Big\}.$$

Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A contenant I et $\mathcal{N}(A)$. On appelle $\sqrt{I}$ le *radical* de I.

(3) Soient I et J deux idéaux de A. Montrer :

  (a) $\sqrt{A} = A$ et $\sqrt{\{0\}} = \mathcal{N}(A)$;

  (b) $I \subseteq J \Rightarrow \sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$;

  (c) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$;

  (d) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$;

  (e) $\sqrt{I} + \sqrt{J} \subseteq \sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$;

  (f) $\sqrt{\mathcal{N}(A)} = \mathcal{N}(A)$.

(4) Soit p_I la projection canonique de A sur A/I. Montrer que $\mathcal{N}(A/I) = p_I(\sqrt{I})$ et en déduire que $\mathcal{N}(A/\mathcal{N}(A)) = \{0\}$.

(5) Soit un entier $n > 1$. Déterminer $\sqrt{n\mathbb{Z}}$ et $\mathcal{N}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Exercice 7. Soient A, B deux anneaux commutatifs, f un morphisme d'anneaux **surjectif** de A dans B et I un idéal de A.

(1) Montrer que $f(I)$ est un idéal de B. Trouver un exemple dans lequel f n'est pas surjectif et $f(I)$ n'est pas un idéal de B.

(2) Soit J un idéal de B. Montrer que $f^{-1}(J)$ est un idéal de A (vrai même si f n'est pas surjectif). Montrer que l'on a un isomorphisme d'anneaux
$$\frac{A}{f^{-1}(J)} \simeq \frac{B}{J}.$$

(3) Soit p_I la projection canonique de A sur A/I. Montrer que les idéaux de A/I sont les $p_I(J)$ où J décrit l'ensemble des idéaux de A contenant I.

(4) Montrer que si A est principal, les idéaux de A/I sont principaux.

(5) Soient I et J deux idéaux de A vérifiant $I \subseteq J$. Montrer que $p_I(J)$ est un idéal de A/I et que $(A/I)/p_I(J)$ est isomorphe à A/J.

Exercice 8. Soit A un anneau commutatif. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est un corps ;

(ii) $A \neq \{0\}$ et les seuls idéaux de A sont $\{0\}$ et A ;

(iii) $A \neq \{0\}$ et tout morphisme d'anneaux de A dans un anneau non nul est injectif.

Exercice 9.

(1) Montrer que dans $\mathbb{Z}[X]$, l'idéal $\langle X \rangle$ est premier mais non maximal.

(2) Soit A un anneau principal. Montrer que tout idéal premier non nul de A est maximal et retrouver le fait (vu en cours) que l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal.

Exercice 10. Soit A un anneau non nul dans lequel tout idéal propre ($\neq A$) est premier. Montrer que A est intègre puis que A est un corps.

Exercice 11. Cet exercice complète l'exercice 7. Soient un morphisme d'anneaux $f : A \to B$, I un idéal de A et J un idéal de B.

(1) Rappeler pourquoi si J est premier, $f^{-1}(J)$ l'est aussi.

(2) Montrer que si f est surjectif et si J est maximal, $f^{-1}(J)$ est un idéal maximal de A.

(3) Est-ce encore vrai si on supprime l'hypothèse de surjectivité ?

(4) Montrer que si f est surjectif , I maximal et $f(I) \neq B$, $f(I)$ est alors maximal.

(5) Montrer, toujours en supposant f surjectif et $f(I) \neq B$, que si I est premier $f(I)$ ne l'est pas forcément.

Exercice 12. Dans cet exercice on admettra le théorème de Krull qui dit que dans un anneau A tout idéal propre $I \subsetneq A$ est contenu dans un idéal maximal. On appelle anneau local un anneau qui possède un unique idéal maximal.

(1) Montrer que si A est local, alors son unique idéal maximal $\mathfrak{m}$ est l'ensemble des éléments non inversibles de A, i.e. $\mathfrak{m} = A \backslash A^\times$.

(2) Soit A un anneau non nul. Montrer que A est local si et seulement si pour tout $x \in A$, alors x est inversible ou $1 - x$ est inversible.

(3) Soit A un anneau non nul. Montrer que A est local si et seulement si la somme de deux éléments non inversibles de A est non inversible.

Exercice 13. Soit K un corps.

(1) Soit $\alpha \in K$. Montrer, en considérant $\phi : K[X] \to K$ qui à $P(X)$ associe $P(\alpha)$, que $I = \langle X - \alpha \rangle$ est maximal dans $K[X]$.

(2) Supposons que K soit algébriquement clos, i.e. tel que tout polynôme de $K[X]$ de degré $\geqslant 1$ admette au moins une racine dans K. Montrer que si I est un idéal maximal de $K[X]$ il existe $\alpha \in K$ unique tel que $I = \langle X - \alpha \rangle$.

(3) Soit $n \geqslant 2$. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in K^n$. Montrer que $I = \langle X_1 - \alpha_1, X_2 - \alpha_2, \ldots, X_n - \alpha_n \rangle$ est un idéal maximal de $K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$. On peut aussi généraliser la question 2). Il s'agit du Nullstellensatz (théorème des zéros) faible de Hilbert. Nous ne le ferons pas ici.