Feuille d'exercices n° 5

Extensions de corps

Exercice 1

(1) Soit p un nombre premier et soit $n \geqslant 2$. Décrire $\mathbf{Q}(\sqrt[n]{p})$ comme quotient de $\mathbf{Q}[X]$ et montrer que l'extension $\mathbf{Q}(\sqrt[n]{p})/\mathbf{Q}$ est de degré n.

(2) On pose $S = \{2^{1/n}; n \in \mathbf{N}^*\}$. Montrer que l'extension $\mathbf{Q}(S)/\mathbf{Q}$ est algébrique. Est-elle finie ?

Exercice 2

Montrer que l'ensemble des nombres réels algébriques est dénombrable. En déduire que les nombres transcendants forment une partie non dénombrable de $\mathbf{R}$.

Exercice 3

On appelle nombre de Liouville un réel x tel que pour tout entier $n > 0$ il existe un rationnel $p_n/q_n \in \mathbf{Q}$, où $p_n, q_n \in \mathbf{Z}$ et $q_n > 1$, vérifiant

$$0 < |x - p_n/q_n| < 1/q_n^n.$$

On se propose de démontrer qu'un nombre de Liouville est transcendant.

(1) Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ un nombre algébrique.

(a) Montrer qu'il existe un polynôme $P(X) \in \mathbf{Z}[X]$ de degré $d \geqslant 1$ tel que $P(\alpha) = 0$.

(b) Établir que quels que soient $a, b \in \mathbf{Z}$ vérifiant $b > 0$ et $P(a/b) \neq 0$, on a $|P(a/b)| \geqslant 1/b^d$.

(c) Soit $\varepsilon > 0$ tel que α soit la seule racine de $P(X)$ dans $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$. Prouver qu'il existe $K > 0$ tel que $|P(x)| \leqslant K|x - \alpha|$ pour tout $x \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$.

(d) En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $|\alpha - a/b| \geqslant C/b^d$ pour tout $a, b \in \mathbf{Z}$ vérifiant $b > 0$ et $a/b \neq \alpha$.

(2) Montrer qu'un nombre de Liouville est transcendant.

(3) Soient $b \in \mathbf{N}$, $b \geqslant 2$, et une suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ d'entiers vérifiant $1 \leqslant a_n \leqslant b - 1$. Montrer que

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k/b^{k!}$$

est transcendant. Exemple (premier transcendant connu) :

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/10^{k!} = 0.110001000000000000000001000000\ldots$$

Exercice 4

(1) Que vaut $[\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbf{Q}]$? Donner une base de $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ vu comme $\mathbf{Q}$-espace vectoriel.

(2) Quel est le polynôme minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sur $\mathbf{Q}$?

(3) En déduire que $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbf{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Exercice 5

Soit a une racine de $X^3 + X + 1$ dans $\mathbf{C}$. Quel est le degré d de l'extension $\mathbf{Q}(a)/\mathbf{Q}$? Soit $b = a^5 + a^2 + 1$. Montrer que b est non nul et exprimer son inverse sous la forme $b^{-1} = P(a)$, où $P(X) \in \mathbf{Q}[X]$ est de degré au plus $d - 1$.

Exercice 6
Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ une racine du polynôme $X^3 + 2X - 1$.

(1) Montrer que $L = \mathbf{Q}(\alpha)$ est une extension de degré 3 de $\mathbf{Q}$.

(2) Exprimer les inverses de α, $1 + \alpha$ et $\alpha + \alpha^2$ dans la base $(1, \alpha, \alpha^2)$ de L sur $\mathbf{Q}$.

(3) Prouver que pour tout $\beta \in L \backslash \mathbf{Q}$ on a $\mathbf{Q}(\beta) = L$.

(4) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme minimal de $x = a + b\alpha + c\alpha^2$ $(a, b, c \in \mathbf{Q})$ soit de degré 3. Déterminer ce polynôme pour $x = 1 - \alpha^2$.

Exercice 7
Soit $P(X) = X^4 - 2X^2 + 9 \in \mathbf{Q}[X]$.

(1) Montrer que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.

(2) Établir que $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, i)$ est un corps de rupture sur $\mathbf{Q}$ de $P(X)$.

Exercice 8

(1) Soit α le réel $\sqrt{1 + \sqrt{7}}$. Trouver le polynôme minimal $P(X)$ de α sur $\mathbf{Q}$. Que vaut $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]$?

(2) Montrer que $K = \mathbf{Q}(\alpha, i\sqrt{6})$ est le corps de décomposition sur $\mathbf{Q}$ de $P(X)$ inclus dans $\mathbf{C}$.

(3) Déterminer le degré et une base de K sur $\mathbf{Q}$.

(4) Soit $\beta = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$. Déterminer le corps de décomposition sur $\mathbf{Q}$ du polynôme minimal de β sur $\mathbf{Q}$ inclus dans $\mathbf{C}$.

Exercice 9 (Théorème de l'élément primitif)
Soit K un corps de caractéristique nulle.

(1) Soient $P(X) \in K[X]$ irréductible et L un corps de décomposition de $P(X)$. Montrer que $P(X)$ n'a que des racines simples dans L.

(2) Soit L/K une extension finie. On suppose que $L = K(x, y)$ et on note $P(X)$ et $Q(X)$ les polynômes minimaux de x et y sur K, de degrés respectifs m et n. Soit M un corps de décomposition de $P(X)Q(X)$ sur K contenant x et y. Dans M on a
$$P(X) = (X - x)\prod_{i=2}^{m}(X - x_i) \quad \text{et} \quad Q(X) = (X - y)\prod_{j=2}^{n}(X - y_j).$$
Montrer qu'il existe $t \in K\backslash\{0\}$ tel que pour tout $i \geqslant 2$ et tout $j \geqslant 2$, $z = x + ty \neq x_i + ty_j$. On pose alors $N = K(z)$ et $R(X) = P(z - tX)$.

(3) Montrer que $R(X) \in N[X]$ et que $\operatorname{pgcd}(R(X), Q(X)) = X - y$.

(4) En déduire que $y \in N$ et que $L = N$.

(5) Montrer par récurrence que toute extension finie de K est simple (ou monogène).

(6) En s'inspirant de la méthode précédemment utilisée trouver $\alpha \in \mathbf{C}$ tel que $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, i) = \mathbf{Q}(\alpha)$.