Agrégation interne de mathématiques

Mathématiques générales 2021

19 octobre 2023

1 - Questions préliminaires

(1) Le polynôme minimal de A est de la forme X^p avec $p \in \mathbf{N}_{>0}$: cela implique que son polynôme caractéristique est X^n. Comme $-\operatorname{Tr}(A)$ est le coefficient de X^{n-1} dans ce dernier, on a donc $\operatorname{Tr}(A) = 0$.

Remarque. Autre preuve : Soit $\overline{\mathbf{K}}$ est une clôture algébrique de $\mathbf{K}$. Si $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$, il existe $X \in \overline{\mathbf{K}}^n \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$, d'où $0 = A^p X = \lambda^p X$, ce qui implique $\lambda = 0$. Cela montre que $\operatorname{Sp}(A) = \{0\}$. La matrice A est donc trigonalisable dans $\mathsf{M}_n(\mathbf{K})$: elle est donc semblable à une matrice triangulaire supérieure, dont les coefficients diagonaux sont nuls. Cela implique que $\operatorname{Tr}(A) = 0$ (*cf* question suivante).

(2) (a) Écrivons $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Si $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, le coefficient d'indice (i,j) du produit AB (resp. BA) est $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$ (resp. $\sum\limits_{\ell=1}^{n} b_{i,\ell}a_{\ell,j}$). Cela implique que

$$\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i}\Big) = \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}a_{i,k}\Big) = \operatorname{Tr}(BA).$$

Cela implique que $\operatorname{Tr}(ABC) = \operatorname{Tr}((AB)C) = \operatorname{Tr}(C(AB)) = \operatorname{Tr}(CAB)$.

(2) (b) On a $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.

(2) (c) D'après la question (b), on a $E_{1,2}E_{2,1}E_{1,1} = E_{1,1}$ d'où $\operatorname{Tr}(E_{1,2}E_{2,1}E_{1,1}) = 1$, et $E_{1,1}E_{2,1}E_{1,2} = 0$ d'où $\operatorname{Tr}(E_{1,1}E_{2,1}E_{1,2}) = 0$: si $A = E_{1,2}$, $B = E_{2,1}$ et $C = E_{1,1}$, on a $\operatorname{Tr}(ABC) \neq \operatorname{Tr}(CBA)$.

(3) (a) Si $A \in \mathsf{M}_n(\mathbf{K})$, on dispose de $\varphi(A)\colon \mathsf{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}$ définie par $\varphi(A)(M) = \operatorname{Tr}(AM)$: c'est une forme linéaire sur $\mathsf{M}_n(\mathbf{K})$. Cela fournit une application $\varphi\colon \mathsf{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathsf{M}_n(\mathbf{K})^\vee$ (où $\mathsf{M}_n(\mathbf{K})^\vee$ désigne le dual de $\mathsf{M}_n(\mathbf{K})$), qui est linéaire par linéarité de la trace. Si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathsf{M}_n(\mathbf{K})$, on a $AE_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}$, et donc $\varphi(A)(E_{i,j}) = a_{j,i}$. Si $A \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, on a donc $a_{j,i} = 0$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, et donc $A = 0$. Le morphisme φ est donc injectif. Comme $\mathsf{M}_n(\mathbf{K})$ et son dual ont même dimension sur $\mathbf{K}$, cela implique que φ est un isomorphisme. En particulier, si f est une forme linéaire sur $\mathsf{M}_n(\mathbf{K})$, il existe $A \in \mathsf{M}_n(\mathbf{K})$ unique telle que $f = \varphi(A)$, *i.e.* telle que pour toute $M \in \mathsf{M}_n(\mathbf{K})$, on ait $f(M) = \operatorname{Tr}(AM)$.

Remarque. Le calcul qui précède montre en fait que $A = (f(E_{j,i}))_{1\leq i,j\leq n}$.

(3) (b) • L'isomorphisme $\varphi\colon \mathsf{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathsf{M}_n(\mathbf{K})^\vee$ construit dans la question précédente transforme la base $(M_i)_{1\leq i\leq n^2}$ de $\mathsf{M}_n(\mathbf{K})$ en une base $(f_i = \varphi(M_i))_{1\leq i\leq n^2}$.

Remarque. On peut aussi raisonner directement : soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n^2} \in \mathbf{K}^{n^2}$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n^2} \lambda_i f_i = 0$: on a $0 = \sum\limits_{k=1}^{n^2} \lambda_k f_k(M) = \sum\limits_{i=1}^{n^2} \lambda_i \operatorname{Tr}(M_i M) = \operatorname{Tr}(AM)$ pour tout $M \in \mathsf{M}_n(\mathbf{K})$, avec $A = \sum\limits_{i=1}^{n^2} \lambda_i M_i$. L'unicité de la représentation des formes linéaires dans la question précédente implique que $A = 0$: comme $(M_i)_{1\leq i\leq n^2}$ est une base de $\mathsf{M}_n(\mathbf{K})$, cela implique que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n^2\}$. Cela montre que la famille $(f_i)_{1\leq i\leq n^2}$ est libre : c'est une base de $\mathsf{M}_n(\mathbf{K})^\vee$ parce que ce dernier est de dimension n^2 sur $\mathbf{K}$.

• Soit $(F_i)_{1\leq i\leq n^2}$ la base antéduale de la base $(f_i)_{1\leq i\leq n^2}$ de $\mathsf{M}_n(\mathbf{K})^\vee$. Cela signifie que $(f_i)_{1\leq k\leq n^2}$ est la base duale de $(F_i)_{1\leq i\leq n^2}$, *i.e.* que pour tout $M \in \mathsf{M}_n(\mathbf{K})$, on a $M = \sum\limits_{i=1}^{n^2} f_i(M)F_i = \sum\limits_{i=1}^{n^2} \operatorname{Tr}(M_i M)F_i$.

(3) (c) Si $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sont tels que $i \neq j$, on a $f(E_{i,j}) = f(E_{i,i}E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{i,i}) = 0$. Par ailleurs, si $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $f(E_{i,i}) = f(E_{i,1}E_{1,i}) = f(E_{1,i}E_{i,1}) = f(E_{1,1})$. Si $\lambda = f(E_{1,1})$ et $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, on a donc $f(M) = f\Big(\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}E_{i,j}\Big) = \sum\limits_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}f(E_{i,j}) = \lambda\sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,i} = \lambda\operatorname{Tr}(M)$, si bien que $f = \lambda\operatorname{Tr}$.

(4) (a) On a bien sûr $\operatorname{Vect}(G) \subset \mathscr{G}$. Par ailleurs, $\mathrm{I}_n \in G \subset \operatorname{Vect}(G)$ et $\operatorname{Vect}(G)$ est stable par produit, donc $\mathscr{G} \subset \operatorname{Vect}(G)$, et donc $\mathscr{G} = \operatorname{Vect}(G)$.

(4) (b) Il suffit d'extraire une base de la partie génératrice G.

(5) (a) Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ une valeur propre de f. Si $v \in E$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ, on a $f(x) = \lambda x$, et donc $f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$, ce qui montre que $g(x)$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ : le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ est donc stable par g.

(5) (b) Comme g est diagonalisable, il existe $P \in \mathbf{K}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(g) = 0$. Si $F \subset E$ est un sous-espace stable par g, on a *a fortiori* $P(g_{|F}) = 0$, ce qui montre que $g_{|F}$ est diagonalisable.

(5) (c) Écrivons $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \subset \mathbf{K}$. Pour $i \in \{1, \dots, r\}$, posons $E_i = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \,\mathsf{Id}_E)$: on a $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$. D'après la question (a), chaque E_i est stable par g. D'après la question (b), chaque $g_{|E_i}$ est diagonalisable. On peut donc trouver une base $\mathfrak{B}_i$ de E_i de diagonalisation de $g_{|E_i}$ (et aussi de $f_{|E_i} = \lambda_i \,\mathsf{Id}_{E_i}$). La réunion $\bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{B}_i$ est une base de co-diagonalisation de f et g.

2 - Un théorème de Burnside

(6) Soit $f \in L(E)$ un élément qui commute à tous les éléments de $\mathscr{A}$. Comme $\mathbf{C}$ est algébriquement clos, on dispose de $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Notons $F \subset E$ le sous-espace propre de f pour la valeur propre λ : on a $F \neq \{0\}$. Par ailleurs, F est stable par tous les éléments de $\mathscr{A}$ en vertu de la question (5) (a). Comme $\mathscr{A}$ est irréductible, cela implique $F = E$, soit encore que $f = \lambda \,\mathsf{Id}_E$ est une homothétie.

(7) Le groupe $\mathscr{A} = \mathsf{SO}_2(\mathbf{R})$ n'a aucun sous-espace stable non trivial dans $\mathbf{R}^2$, mais est commutatif : la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{A}$ n'est pas une homothétie mais commute à tous les éléments de $\mathscr{A}$.

(8) (a) Notons $\mathfrak{B}$ la base $(e_1, \dots, e_n)$ et $\widetilde{\mathfrak{B}}$ la base de E^n qui s'en déduit. Soit $a \in \mathscr{A}$, et $A \in \mathsf{M}_n(\mathbf{C})$ sa matrice dans la base $\mathfrak{B}$. La matrice de $\rho(a)$ dans la base $\widetilde{\mathfrak{B}}$ est alors $D = \mathrm{diag}(A, \dots, A) \in \mathsf{M}_{n^2}(\mathbf{C})$, la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont tous égaux à A. Soit $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathsf{M}_{n^2}(\mathbf{C})$ (avec $M_{i,j} \in \mathsf{M}_n(\mathbf{C})$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$) la matrice par blocs d'un élément de $L(E^n)$ qui commute à $\rho(a)$. On a $DM = MD$, ce qui équivaut à $AM_{i,j} = M_{i,j}A$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Comme c'est vrai pour tout $a \in \mathscr{A}$, la question (6) implique que $M_{i,j}$ est une homothétie pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Il existe donc $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{C}^{n^2}$ tels que $M = (\lambda_{i,j}\, \mathrm{I}_n)_{1 \leq i,j \leq n}$. Réciproquement, toute matrice de cette forme commute à toutes les matrices de la forme $\mathrm{diag}(A, \dots, A)$ comme ci-dessus.

(8) (b) Soit $M \in \mathsf{M}_n(\mathbf{C})$ la matrice de f dans la base $\mathfrak{B}$: celle de $\rho(f)$ dans la base $\widetilde{\mathfrak{B}}$ est $\mathrm{diag}(M, \dots, M)$ (par blocs). Cette dernière commute à toutes les matrices de la forme $(\lambda_{i,j}\, \mathrm{I}_n)_{1 \leq i,j \leq n}$ où $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{C}^{n^2}$, *i.e.* aux matrices dans la base $\widetilde{\mathfrak{B}}$ des éléments de $\mathscr{C}$. Cela signifie précisément que $\rho(f)$ commute à tous les éléments de $\mathscr{C}$.

(9) (a) On dispose de l'isomorphisme $\psi_i \colon E \xrightarrow{\sim} E_i$ (donné par $x \mapsto (0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0)$). Par définition, on a $\rho(f) \circ \psi_i = \psi_i \circ f$ pour tout $f \in L(E)$. Posons $F_i = \psi_i^{-1}(W \cap E_i)$. Soit $a \in \mathscr{A}$. Par définition, E_i est stable par $\rho(a)$: il est de même de $W \cap E_i$. Si $x \in F_i$, on a donc $\psi_i(a(x)) = \rho(a)(\psi_i(x)) \in W \cap E_i$, soit $a(x) \in F_i$. Comme c'est vrai pour tout $a \in \mathscr{A}$ et $\mathscr{A}$ est irréductible, on a $F_i = \{0\}$ ou $F_i = E$, et donc $W \cap E_i = \{0\}$ ou $W \cap E_i = E_i$ en appliquant ψ_i.

(9) (b) Comme W et E_2 sont stables par les $\rho(a)$ pour tout $a \in \mathscr{A}$, il en est de même de W_2. La question précédente implique donc que $W_2 \cap E_2 = \{0\}$ ou $W_2 \cap E_2 = E_2$.

(9) (c) • Si $i \in \{1, \dots, n\}$ et W_i est construit, stable par les $\rho(a)$ pour tout $a \in \mathscr{A}$, alors $W_i \cap E_i = \{0\}$ ou $W_i \cap E_i = E_i$ (*cf* question (a)) : on pose alors $W_{i+1} = \begin{cases} W_i \oplus E_i & \text{si } W_i \cap E_i = \{0\} \\ W_i & \text{si } W_i \cap E_i = E_i \end{cases}$. Comme W_i et E_i sont stables par les $\rho(a)$ pour tout $a \in \mathscr{A}$, il en est de même de W_{i+1}. Cela définit une suite croissante $(W_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ de sous-espaces vectoriels de E^n stables par les $\rho(a)$ pour tout $a \in \mathscr{A}$.

• Par construction, on a $E_i \subset W_{i+1}$ pout tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Cela implique que $E^n = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \subset W_{n+1}$, et donc $W_{n+1} = E^n$. Posons $I = \{i \in \{1, \dots, n\} \,;\, W_{i+1} \neq W_i\}$: on a $E^n = W \oplus W'$ avec $W' = \bigoplus_{i \in I} E_i$. Comme les E_i sont stables par les $\rho(a)$ pour tout $a \in \mathscr{A}$, il en est de même de W'.

(10) Soit $a \in \mathscr{A}$. Si $x \in E^n$, on a $x = w+w'$ avec $w = p(x) \in W$ et $w' \in W'$, d'où $\rho(a)(x) = \rho(a)(w)+\rho(a)(w')$. Comme $\rho(a)(w) \in W$ et $\rho(a)(w') \in W'$ (car W et W' sont stables par $\rho(a)$ par hypothèse), on a donc $p(\rho(a)(x)) = \rho(a)(w) = \rho(a)(p(x))$. Comme c'est vrai pour tout $x \in E^n$, on a $p \circ \rho(a) = \rho(a) \circ p$, *i.e.* $p \in \mathscr{C}$.

(11) Posons $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n) \in E^n$ et

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathscr{A} &\to E^n \\ a &\mapsto (a(e_1), \dots, a(e_n)) = \rho(a)(\underline{e}). \end{aligned}$$

C'est une application linéaire et $W = \mathrm{Im}(\varphi)$: cela montre que W est un sous-espace vectoriel de E^n. Si $x \in W$, il existe $\alpha \in \mathscr{A}$ tel que $x = \rho(\alpha)(\underline{e})$: si $a \in \mathscr{A}$, on a $\rho(a)(x) = \rho(a)(\rho(\alpha)(\underline{e})) = \rho(a \circ \alpha)(\underline{e}) \in W$. Cela montre que W est stable par les $\rho(a)$ pour tout $a \in \mathscr{A}$.
La question précédente fournit alors un projecteur p de E^n, d'image W, et tel que $p \in \mathscr{C}$. Notons que comme $\underline{e} = \rho(\mathsf{Id}_E)(\underline{e}) = \varphi(\mathsf{Id}_E) \in W$, on a $p(\underline{e}) = \underline{e}$. Soit $f \in L(E)$. D'après la question (8) (b), on sait que $\rho(f)$ commute à p. Cela implique que $\rho(f)(\underline{e}) = \rho(f)(p(\underline{e})) = p(\rho(f)(\underline{e})) \in W = \mathrm{Im}(\varphi)$. Il existe donc $a \in \mathscr{A}$ tel que $\rho(f)(\underline{e}) = \rho(a)(\underline{e})$, soit encore $(f(e_1), \dots, f(e_n)) = (a(e_1), \dots, a(e_n))$. Il en résulte que a et f coïncident sur la base $\mathfrak{B}$: ils sont égaux. Cela implique que $f = a \in \mathscr{A}$. Comme c'est vrai pour tout $f \in L(E)$, il en résulte que $\mathscr{A} = L(E)$. On a donc prouvé le théorème de Burnside.

3 - Sur les hypothèses dans le théorème de Burnside

(12) (a) Si $a, b \in \mathbf{C}$, posons $M_{a,b} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Son polynôme caractéristique est

$$\chi_{M_{a,b}}(X) = \begin{vmatrix} -X & a & 0 \\ b & -X & -a \\ 0 & b & -X \end{vmatrix} = -X(X^2+ab) - b(-aX) = -X^3,$$

ce qui montre que $M_{a,b}^3 = 0$ en vertu du théorème de Cayley-Hamilton.
(12) (b) On a $M_{1,0}M_{0,1} = \mathrm{diag}(1,-1,0)$ et $M_{0,1}M_{1,0} = \mathrm{diag}(0,1,-1)$, ce qui implique que

$$\mathscr{D} := \mathrm{Vect}\{\mathrm{I}_3, \mathrm{diag}(1,-1,0), \mathrm{diag}(0,1,-1)\} \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{A}),$$

et la sous-algèbre de $\mathsf{M}_3(\mathbf{C})$ engendrée par $\mathscr{A}$ contient l'ensemble $\mathscr{D}$ des matrices diagonales.

(12) (c) D'après la question précédente, un sous-espace stable par tous les éléments de $\mathscr{A}$ est stable par tous les éléments de $\mathscr{D}$. Les droites (resp. plans) stables par tous les éléments de $\mathscr{D}$ sont $\mathbf{C}\,e_1$, $\mathbf{C}\,e_2$ et $\mathbf{C}\,e_3$ (resp. $\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$, $\mathrm{Vect}(e_1,e_3)$ et $\mathrm{Vect}(e_2,e_3)$), où $\{e_1,e_2,e_3\}$ désigne la base canonique de $\mathbf{C}^3$. Cela dit, aucune de ces droites (resp. plans) n'est stable par $M_{1,0}$ *et* $M_{0,1}$. Il en résulte que les seuls sous-espaces de $\mathbf{C}^3$ stables par tous les éléments de $\mathscr{A}$ sont $\{0\}$ et $\mathbf{C}^3$.

Remarque. Autre approche. On a $\mathscr{A} = \mathrm{Vect}\{M_{1,0}, M_{0,1}\}$. Les droites stables par tous les éléments de $\mathscr{A}$ sont les droites stables par $M_{1,0}$ et $M_{0,1}$. Leur union est l'ensemble des vecteurs propres communs à $M_{1,0}$ et $M_{0,1}$. La seule valeur propre est 0 : il s'agit donc de $\mathrm{Ker}(M_{1,0}) \cap \mathrm{Ker}(M_{0,1}) = \mathbf{C}(0,0,1) \cap \mathbf{C}(1,0,0) = \{0\}$. Cela prouve qu'il n'y a pas de droite stable par tous les éléments de $\mathscr{A}$. De même, les plans stables par $M \in \mathsf{M}_3(\mathbf{C})$ correspondent aux droites stables par ${}^tM$. Comme ${}^tM_{1,0}$ et ${}^tM_{0,1}$ n'ont pas de droite stable en commun, il n'existe pas de plan stable par tous les éléments de $\mathscr{A}$.

L'ensemble $\mathscr{A}$ est donc irréductible, mais n'est pas égal à $\mathsf{M}_3(\mathbf{C})$. Cela montre que l'hypothèse que $\mathscr{A}$ soit une sous-algèbre de $L(E)$ est nécessaire.

(13) (a) Soit $x = \frac{u}{v}$ avec $u \in \mathbf{Z}$ et $v \in \mathbf{N}_{>0}$ tels que $\mathsf{pgcd}(u,v) = 1$ une racine rationnelle de X^3+X+1. On a $u^3+uv^2+v^3 = 0$, ce qui implique que $v \mid u^3$: comme $\mathsf{pgcd}(u,v) = 1$, on a nécessairement $v = 1$. On a alors $u(u^2+1) = -1$, ce qui montre que $x = u \in \mathbf{Z}^\times = \{\pm 1\}$. Comme X^3+X+1 n'admet ni 1 ni -1 comme racine, cela montre que X^3+X+1 n'a pas de racine dans $\mathbf{Q}$. Comme il est de degré 3, cela implique qu'il est irréductible sur $\mathbf{Q}$.

Remarque. On pouvait aussi invoquer l'irréductibilité de X^3+X+1 dans $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[X]$, qui implique son irréductibilité sur $\mathbf{Z}$, et donc sur $\mathbf{Q}$.

(13) (b) Le noyau du morphisme surjectif de $\mathbf{Q}$-algèbres $\mathbf{Q}[X] \to \mathscr{A}$; $P \mapsto P(u)$ est l'idéal engendré par le polynôme minimal μ_u de u. Ce dernier divise le polynôme caractéristique $\chi_u(X) = -(X^3+X+1)$ (théorème de Cayley-Hamilton). Comme ce dernier est irréductible sur $\mathbf{Q}$ (*cf* question précédente), on a $\mu_u = X^3+X+1$. En passant au quotient, le morphisme ci-dessus induit un isomorphisme $\mathbf{Q}[X]/(X^3+X+1) \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}$. Une base de la $\mathbf{Q}$-algèbre source est $(1, \overline{X}, \overline{X}^2)$ (où $\overline{X}$ désigne l'image de X dans le quotient), ce qui implique qu'une base de $\mathscr{A}$ sur $\mathbf{Q}$ est $(\mathsf{Id}_{\mathbf{Q}^3}, u, u^2)$.

(13) (c) Comme X^3+X+1 est irréductible sur $\mathbf{Q}$ (*cf* question (a)), le quotient $\mathbf{Q}[X]/(X^3+X+1)$ est un corps : il en est de même de $\mathscr{A}$.

(13) (d) Si $W\subset\mathbf{Q}^3$ est un sous-espace stable par u, alors $\chi_{u_{|W}}$ divise $\chi_u=-(X^3+X+1)$ dans $\mathbf{Q}[X]$. Comme X^3+X+1 est irréductible sur $\mathbf{Q}$, on a $\dim_{\mathbf{Q}}(W)=\deg(\chi_{u_{|W}})\in\{0,3\}$. Cela montre que les seuls sous-espaces de $\mathbf{Q}^3$ stables par u sont $\{0\}$ et $\mathbf{Q}^3$, et donc que $\mathscr{A}$ est irréductible. On a cependant $\mathscr{A}\neq\mathsf{M}_3(\mathbf{Q})$: cela montre que le théorème de Burnside nécessite que le corps de base soit algébriquement clos.

4 - Trois applications du théorème de Burnside à des sous-groupes de $\mathsf{GL}_n(\mathbf{C})$

(14) (a) On complète le singleton $\{X\}$ (resp. $\{Y\}$) en une base orthonormée $(X_1=X,X_2,\dots,X_n)$ (resp. $(Y_1=Y,Y_2,\dots,Y_n)$) de $\mathbf{C}^n$. Notons alors $U\in\mathsf{GL}_n(\mathbf{C})$ l'unique matrice telle que $UX_k=Y_k$ pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$. Comme elle transforme une base orthonormée en une base orthonormée, U est unitaire. Par construction, on a $UX=Y$.

(14) (b) D'après la question (4) (a), $\mathrm{Vect}(\mathsf{U}_n(\mathbf{C}))$ coïncide avec la sous-algèbre $\mathscr{A}$ de $\mathsf{M}_n(\mathbf{C})$ engendrée par $\mathsf{U}_n(\mathbf{C})$. Soit $V\subset\mathbf{C}^n$ un sous-espace vectoriel non nul et stable par tous les éléments de $\mathscr{A}$. D'après la question précédente, si $X\in V$ et $Y\in\mathbf{C}^n$ sont de norme 1, il existe $A\in\mathscr{A}$ tel que $Y=AX\in V$. Cela implique que la sphère unité est incluse dans V : il en est de même du sous-espace engendré $\mathbf{C}^n$. On a donc montré que $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre irréductible de $\mathsf{M}_n(\mathbf{C})$. Comme $n\geq 2$, le théorème de Burnside implique que $\mathrm{Vect}(\mathsf{U}_n(\mathbf{C}))=\mathscr{A}=\mathsf{M}_n(\mathbf{C})$.

(15) (a) Comme G est irréductible, il en est de même de la sous-algèbre $\mathscr{G}$ de $\mathsf{M}_n(\mathbf{C})$ qu'il engendre. Comme $n\geq 2$, le théorème de Burnside implique que $\mathscr{G}=\mathsf{M}_n(\mathbf{C})$. Par ailleurs, on a $\mathscr{G}=\mathrm{Vect}(G)$ en vertu de la question (4) (a). ce qui montre que $\mathrm{Vect}(G)=\mathsf{M}_n(\mathbf{C})$. On peut donc extraire une base $(M_1,\dots,M_{n^2})$ de $\mathsf{M}_n(\mathbf{C})$ formée d'éléments de la partie génératrice G.

(15) (b) Si $i\in\{1,\dots,n^2\}$ et $M\in G$, on a $M_iM\in G$: cela implique que les valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ de M_iM sont toutes de module 1. On a donc $|\mathrm{Tr}(M_iM)|=\left|\sum\limits_{k=1}^n\lambda_k\right|\leq\sum\limits_{k=1}^n|\lambda_k|=n$. Si $\|.\|$ est une norme sur $\mathsf{M}_n(\mathbf{C})$, et si $(F_i)_{1\leq i\leq n^2}$ est une base de $\mathsf{M}_n(\mathbf{C})$ comme dans la question (3) (b), l'inégalité triangulaire implique que $\|M\|=\left\|\sum\limits_{i=1}^{n^2}\mathrm{Tr}(M_iM)F_i\right\|\leq\sum\limits_{i=1}^{n^2}|\mathrm{Tr}(M_iM)|\,\|F_i\|$ et donc $\|M\|\leq C:=n\sum\limits_{i=1}^{n^2}\|F_i\|$, ce qui montre que G est borné (on est en dimension finie, cela ne dépend pas de la norme).

(16) (a) Un élément $g\in\mathsf{M}_n(\mathbf{C})$ est unipotent si et seulement si sa seule valeur propre est 1, si et seulement si la seule valeur propre de $g-\mathsf{Id}_{\mathbf{C}^n}$ est 0 si et seulement si le polynôme caractéristique de $g-\mathsf{Id}_{\mathbf{C}^n}$ est $(-X)^n$ si et seulement si $g-\mathsf{Id}_{\mathbf{C}^n}$ est nilpotent.

(16) (b) Si $g\in G$, l'endomorphisme $g-\mathsf{Id}_{\mathbf{C}^n}$ est nilpotent en vertu de la question précédente, donc de trace nulle. Cela montre que $\mathrm{Tr}(g)=n$. Si $f\in G$, on a $a\circ f\in G$, donc $\mathrm{Tr}(a)=\mathrm{Tr}(a\circ f)=n$, et donc $\mathrm{Tr}(b\circ f)=\mathrm{Tr}((a-\mathsf{Id}_{\mathbf{C}^n})\circ f)=\mathrm{Tr}(a\circ f)-\mathrm{Tr}(f)=0$.

(16) (c) Comme $\mathscr{G}$ est irréductible, on a $\mathscr{G}=L(\mathbf{C}^n)$ en vertu du théorème de Burnside. D'après la question (4) (a), on a donc $\mathrm{Vect}(G)=L(\mathbf{C}^n)$. Par linéarité, la question (b) implique donc que $\mathrm{Tr}(b\circ f)=0$ pour tout $f\in L(\mathbf{C}^n)$. La question (3) (a) implique alors que $b=0$, et donc $a=\mathsf{Id}_{\mathbf{C}^n}$. Il en résulte que $G=\{\mathsf{Id}_{\mathbf{C}^n}\}$, contredisant le fait que $\mathrm{Vect}(G)=L(\mathbf{C}^n)$ (car on a $n\geq 2$). L'hypothèse « $\mathscr{G}$ est irréductible » est donc absurde.

(16) (d) Montrons par récurrence sur $n\in\mathbf{N}_{>0}$ que si G est un sous-groupe de $\mathsf{GL}_n(\mathbf{C})$ est constitué d'éléments tous unipotents, alors ils sont co-trigonalisables. Le cas $n=1$ est trivial : supposons $n\geq 2$. D'après la question précédente, la sous-algèbre $\mathscr{G}$ engendrée par G n'est pas irréductible. Il existe donc un sous-$\mathbf{C}$-espace vectoriel $\{0\}\subsetneq V\subsetneq\mathbf{C}^n$ stable par tous les éléments de G. Choisissons un supplémentaire W de V dans $\mathbf{C}^n$. Tout $g\in G$ induit donc un élément $g_{|V}\in L(V)$. Notons par ailleurs $\iota\colon W\to\mathbf{C}^n$ l'inclusion et $\pi\colon\mathbf{C}^n\to W$ le projecteur sur W parallèlement à V. Si $g\in G$, on dispose de $g_{|W}=\pi\circ g\circ\iota\in L(W)$. Si $g,\gamma\in G$, on a bien sûr $(g\circ\gamma^{-1})_{|V}=g_{|V}\circ\gamma_{|V}^{-1}$. Par ailleurs, $g_{|V}-\mathsf{Id}_V=(g-\mathsf{Id}_{\mathbf{C}^n})_{|V}$ est nilpotent : cela montre que $G_{|V}:=\{g_{|V}\}_{g\in G}$ est un sous-groupe de $\mathsf{GL}(V)$ constitué d'éléments tous unipotents. L'hypothèse de récurrence implique qu'ils sont co-trigonalisables : il existe une base $\mathfrak{B}_V$ de V dans laquelle la matrice de $g_{|V}$ est triangulaire supérieure pour tout $g\in G$.

De même, si $g,\gamma\in G$, et $x\in W$, on a $\gamma(\iota(x))=\iota(\gamma_{|W}(x))+y$ avec $y\in V$ donc $\iota(x)=\gamma^{-1}(\iota(\gamma_{|W}(x))+y)$, et donc $x=\pi\circ\iota(x)=(\gamma^{-1})_W\circ\gamma_W(x)$ vu que $\gamma^{-1}(y)\in V=\mathrm{Ker}(\pi)$, ce qui montre que $(\gamma^{-1})_{|W}=\gamma_{|W}^{-1}$.

De même, on a $g \circ \gamma(\iota(x)) = g(\iota(\gamma_{|W}(x)) + y) = g(\iota(\gamma_W(x))) + g(y)$ et donc $(g \circ \gamma)_W(x) = g_W \circ \gamma_W(x)$ vu que $\pi(g(y)) = 0$ parce que $g(y) \in V$, ce qui montre que $(g \circ \gamma)_W = g_W \circ \gamma_W$: l'application $g \mapsto g_{|W}$ est un morphisme de groupes $G \to \mathsf{GL}(W)$. Comme précédemment, on a $g_{|W} - \mathsf{Id}_W = \pi \circ (g - \mathsf{Id}_{\mathbf{C}^n}) \circ \iota$ est nilpotent, ce qui montre que $G_W := \{g_{|W}\}_{g \in G}$ est un sous-groupe de $\mathsf{GL}(W)$ constitué d'éléments tous unipotents. L'hypothèse de récurrence implique qu'ils sont co-trigonalisables : il existe une base $\mathfrak{B}_W$ de W dans laquelle la matrice de $g_{|W}$ est triangulaire supérieure pour tout $g \in G$.
Posons $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_V \cup \mathfrak{B}_W$: c'est une base de $\mathbf{C}^n$ dans laquelle la matrice de $g \in G$ est triangulaire supérieure par blocs, et donc chaque bloc diagonal est triangulaire supérieure en vertu de ce qui précède. Cela montre que $\mathfrak{B}$ est une base de co-trigonalisation de tous les éléments $g \in G$.

5 - Autour des matrices magiques et des matrices de permutation

(17) On a $\sum_{i=1}^n f_i = \sum_{j=1}^n g_j$: la famille $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est liée. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_{n-1} \in \mathbf{C}$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j g_j = 0$. Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^n m_{i,j} + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \sum_{i=1}^n m_{i,j} = 0$, soit encore $\sum_{i=1}^n \left(\lambda_n m_{i,n} + \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_i + \mu_j) m_{i,j}\right) = 0$. Appliqué aux matrices $E_{i,j}$ pour $1 \leq i,j \leq n$, cela implique que $\lambda_n = 0$ et $\lambda_i + \mu_j = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Avec $i = n$, on a donc $\mu_j = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$, puis $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Cela montre que la famille $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_{n-1})$ est libre.

(18) D'après la question précédente, l'application linéaire

$$\begin{aligned} \Phi\colon\ \mathsf{M}_n(\mathbf{C}) &\to \mathbf{C}^{2n-1} \\ M &\mapsto (f_1(M), \dots, f_n(M), g_1(M), \dots, g_{n-1}(M)) \end{aligned}$$

est surjective. Comme $g_n = -\sum_{i=1}^n f_i - \sum_{j=1}^{n-1} g_j$, on a $\operatorname{Ker}(\Phi) = \mathscr{M}_0$. Le théorème du rang implique donc que

$$\dim_{\mathbf{C}}(\mathscr{M}_0) = \dim_{\mathbf{C}}(\mathsf{M}_n(\mathbf{C})) - \operatorname{rg}(\Phi) = n^2 - (2n-1) = (n-1)^2.$$

(19) Notons $J \in \mathsf{M}_n(\mathbf{C})$ la matrice dont toutes les composantes valent 1 : on a $\mathscr{M} = \mathscr{M}_0 \oplus \mathbf{C}\, J$, ce qui implique que $\dim_{\mathbf{C}}(\mathscr{M}) = \dim_{\mathbf{C}}(\mathscr{M}_0) + 1 = (n-1)^2 + 1$.

(20) On a $P_\sigma \in \mathscr{M}$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ (on a $f_i(P_\sigma) = g_j(P_\sigma) = 1$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$), ce qui implique que $\operatorname{Vect}(P_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \subset \mathscr{M}$ par linéarité.

(21) Posons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$. Le vecteur $m(e_1 + \cdots + e_n)$ a pour coordonnées $MX = \begin{pmatrix} f_1(M) \\ \vdots \\ f_n(M) \end{pmatrix}$. Cela implique que $m(D) \subset D$ si et seulement si la suite $(f_i(M))_{1 \leq i \leq n}$ est constante. De même, le vecteur ligne ${}^tX$ est la matrice d'une forme linéaire ψ telle que $H = \operatorname{Ker}(\psi)$: on a $m(H) \subset H$ si et seulement si $\psi \circ m \in \mathbf{C}\,\psi$. Matriciellement cela équivaut à $(g_1(M), \dots, g_n(M)) = {}^tXM \in \mathbf{C}\,{}^tX$, ce qui équivaut au fait que la suite $(g_j(M))_{1 \leq j \leq n}$ est constante. Finalement, on a montré que $M \in \mathscr{M}$ si et seulement si $m(D) \subset D$ et $m(H) \subset H$.

(22) • Soit $\Delta = \operatorname{Vect}(v)$ avec $v \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ une droite stable par tous les p_σ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Écrivons $v = (v_1, \dots, v_n)$. Si $i, j \in \{1, \dots, n\}$ sont distincts, notons $\tau_{i,j} \in \mathscr{S}_n$ la transposition qui échange i et j. Si $1 \leq i < j \leq n$, on a

$$v = p_{\tau_{i,j}}(v) = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n)$$

ce qui implique $v_i = v_j$. Comme c'est vrai pour tous $1 \leq i < j \leq n$, on a $v_1 = \cdots = v_n$, ce qui implique que $v \in D$, et donc $\Delta = D$.
• Soit $E \subset \mathbf{C}^n$ un sous-espace vectoriel non inclus dans D et stable par tous les p_σ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Il existe $v = (v_1, \dots, v_n) \in E$ et $1 \leq i < j \leq n$ tels que $v_i \neq v_j$. Avec les notations qui précèdent, on a

$$\tfrac{1}{v_j - v_i} p_{\tau_{i,j}}(v) - v = e_i - e_j \in E$$

Si $i > 1$, on a $\tau_{1,i}(e_i - e_j) = e_1 - e_j \in E$. Enfin, si $k \in \{2, \dots, n\} \setminus \{j\}$, on a $\tau_{j,k}(e_1 - e_j) = e_1 - e_k \in E$. Il en résulte que $H = \mathrm{Vect}(e_1 - e_k)_{1<k\leq n} \subset E$, et donc que $E = h$ ou $E = \mathbf{C}^n$ (vu que H est un hyperplan). Finalement, on a montré que les seuls sous-espaces stricts de $\mathbf{C}^n$ et stables par tous les p_σ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sont D et H.

(23) L'application $\mathfrak{S}_n \to \mathsf{GL}(H; \sigma \mapsto p_{\sigma|H}$ est un morphisme de groupes : son image $G = \{p_{\sigma|H}\}_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}$ est un sous-groupe de $\mathsf{GL}(H)$. D'après la question (4) (a), la sous-algèbre $\mathscr{A} \subset L(H)$ engendrée par G coïncide avec $\mathrm{Vect}(G)$. La question (22) implique que $\mathscr{A}$ est irréductible : le théorème de Burnside implique que $\mathscr{A} = L(H)$, soit encore $L(H) = \mathrm{Vect}(p_{\sigma|H})_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}$ en vertu de ce qui précède.

(24) On a $m(H) \subset H$: on dispose de l'endomorphisme induit $m_{|H} \in L(H)$. D'après la question précédente, il existe $N \in \mathbf{N}_{>0}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbf{C}$ et $\sigma_1, \dots, \sigma_N \in \mathfrak{S}_n$ tels que $m_{|H} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i|H}$. Cela implique que $\widetilde{m} := m - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i}$ est un élément de $\mathscr{M}$ tel que $H \subset \mathrm{Ker}(\widetilde{m})$. D'après la question (22), on a $\widetilde{m}(D) \subset D$: il existe $\alpha \in \mathbf{C}$ tel que $\widetilde{m}(e_1 + \dots + e_n) = n\alpha(e_1 + \dots + e_n)$. Les endomorphismes $\widetilde{m}$ et αu coïncident sur H et sur D : ils sont égaux. On a alors $m = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i} + \alpha u$.

(25) Si $i, j \in \{1, \dots, n\}$, il y a $(n-1)!$ éléments $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tels que $\sigma(i) = j$: on a $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} p_\sigma = (n-1)!u$, et donc $u \in \mathrm{Vect}(p_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}$. La question précédente montre donc que $\mathscr{M} \subset \mathrm{Vect}(P_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}$. La question (20) montre que cette inclusion est une égalité.

6 - Passage au quotient et co-trigonalisation

(26) Il suffit d'appliquer la définition avec $G = \{0\}$ (on a alors $F \xrightarrow{\sim} F/G$).

(27) Soit $y \in E$. On a $\overline{y} \in \mathrm{Im}(\overline{f})$ si et seulement s'il existe $x \in E$ tel que $y + F = f(x) + F$:cela équivaut à $y \in \mathrm{Im}(f) + F$. Cela implique que $\mathrm{Im}(\overline{f}) = (\mathrm{Im}(f) + F)/F$. L'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f) + F$ induit par passage au quotients un isomorphisme $\mathrm{Im}(f)/(\mathrm{Im}(f) \cap F) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Im}(f) + F)/F$. On en déduit que

$$\mathrm{rg}(\overline{f}) = \dim_{\mathbf{C}}\big(\mathrm{Im}(f)/(\mathrm{Im}(f) \cap F)\big) = \mathrm{rg}(f) - \dim_{\mathbf{C}}(\mathrm{Im}(f) \cap F) \leq \mathrm{rg}(f).$$

(28) Notons $\pi\colon E \to E/F$ la surjection canonique : on a $L = \pi^{-1}(L')$ donc $F \subset L \subset E$. La surjection π induit un isomorphisme $L/F \xrightarrow{\sim} L'$: on a $\dim_{\mathbf{C}}(L) = \dim_{\mathbf{C}}(L') + \dim_{\mathbf{C}}(F)$. Comme $\{0\} \subsetneq L' \subsetneq E/F$ par hypothèse, on a $0 < \dim_{\mathbf{C}}(L') < \dim_{\mathbf{C}}(E/F)$, et donc $\dim_{\mathbf{C}}(F) < \dim_{\mathbf{C}}(L) < \dim_{\mathbf{C}}(E/F) + \dim_{\mathbf{C}}(F) = \dim_{\mathbf{C}}(E)$. Cela montre que L distinct de F et de E.

(29) Soient E une $\mathbf{C}$-espace vectoriel non nul et $\mathscr{F} \subset L(E)$ une famille d'endomorphismes qui vérifie la propriété $\mathscr{P}$. Soit $\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_m = E$ une suite strictement croissante de sous-$\mathbf{C}$-espaces vectoriels tous stables par les éléments de $\mathscr{F}$ (il existe de telles suites, par exemple $\{0\} \subset E$). Supposons-la le longueur m maximale. Supposons qu'il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\dim_{\mathbf{C}}(L_i/L_{i-1}) \geq 2$. Comme la propriété $\mathscr{P}$ est transmise par passage au quotient, la famille $\overline{\mathscr{F}} := \{\overline{f}\}_{f\in\mathscr{F}}$ (où $\overline{f}$ désigne l'endomorphisme de L_i/L_{i-1} induit par f) a la propriété $\mathscr{P}$. L'hypothèse faite sur cette dernière et le fait que $\dim_{\mathbf{C}}(L_i/L_{i-1})$ impliquent que $\overline{\mathscr{F}}$ est réductible : il existe un sous-$\mathbf{C}$-espace vectoriel strict L' de L_i/L_{i-1} stable par tous les éléments de $\overline{\mathscr{F}}$. Si $\pi\colon L_i \to L_i/L_{i-1}$ désigne la surjection canonique, le sous-espace $L := \pi^{-1}(L')$ vérifie $L_{i-1} \subsetneq L \subsetneq L_i$ en vertu de la question précédente. Par ailleurs, si $f \in \mathscr{F}$, la stabilité de L' par $\overline{f}$ implique que $f(L) \subset L + L_{i-1} = L$. La suite strictement croissante

$$\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_{i-1} \subset L \subset L_i \subset \dots \subset L_m = E$$

est constituée de sous-$\mathbf{C}$-espaces vectoriels tous stables par les éléments de $\mathscr{F}$, et de longueur $m+1$, contendisant la maximalité de m. Cela implique que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on a $\dim_{\mathbf{C}}(L_i/L_{i-1}) = 1$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on peut donc choisir un vecteur $e_i \in E \setminus \{0\}$ tel que $L_i = L_{i-1} \oplus \mathbf{C}\, e_i$. On a donc $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbf{C}\, e_i$, ce qui montre que $\mathfrak{B} := (e_i)_{1\leq i\leq m}$ est une base de E. Comme $f(L_i) \subset L_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, la matrice de f dans la base $\mathfrak{B}$ est triangulaire supérieure. La famille $\mathscr{F}$ est donc co-trigonalisable.

(30) **(a)** Notons E le $\mathbf{C}$-espace vectoriel sur lequel sont définis les éléments de $\mathscr{C}$. On peut supposer $\mathscr{C}$ non vide. Si $\mathscr{C}$ n'est constitué que d'homothéties, alors c'est trivial : tous sous-espace F tel que $\{0\} \subsetneq F \subsetneq E$ (il en existe vu que $\dim_{\mathbf{C}}(E) \geq 2$) est stable par tous les éléments de $\mathscr{C}$. Supposons désormais que $\mathscr{C}$ contient un élément f qui n'est pas une homothétie. Comme $\mathbf{C}$ est algébriquement clos, f admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbf{C}$. Notons F les sous-espace propre de f_0 associé. On a $\{0\} \subsetneq F \subsetneq E$. Par ailleurs, si $g \in \mathscr{C}$, et si $x \in F$, on a $f(x) = \lambda x$, donc $f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$, ce qui montre que $g(x) \in F$. On a donc $g(F) \subset F$ pour tout $g \in \mathscr{C}$, ce qui montre que $\mathscr{C}$ est réductible.

(30) (b) La propriété de commuter est transmise par passage au quotient : la question (29) s'applique donc, et $\mathscr{C}$ est co-trigonalisable.

(31) (a) Notons E le $\mathbf{C}$-espace vectoriel sur lequel sont définis les éléments de $\mathscr{A}$ et posons $\mathscr{A}' = \mathbf{C}\,\mathsf{Id}_E \oplus \mathscr{A}$. C'est un sous-$\mathbf{C}$-espace vectoriel de $L(E)$ stable par composition : en effet, si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathscr{A}$, on a $(\lambda_1 \mathsf{Id}_E + \alpha_1) \circ (\lambda_2 \mathsf{Id}_E + \alpha_2) = \lambda_1\lambda_2 \mathsf{Id}_E + \alpha$ avec $\alpha = \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1 + \alpha_1 \circ \alpha_2 \in \mathscr{A}$. Il en résulte que $\mathscr{A}'$ est une sous-algèbre de $L(E)$ (au sens des définitions en préambule du sujet). Par ailleurs, si $f \in \mathscr{A}'$, l'élément $f - \frac{\mathrm{Tr}(f)}{n} \mathsf{Id}_E \in \mathscr{A}$ est nilpotent, donc de spectre réduit à $\{0\}$: on a $\mathrm{Sp}(f) = \left\{\frac{\mathrm{Tr}(f)}{n}\right\}$. Si $\dim_{\mathbf{C}}(E) \geq 2$, il existe des endomorphismes donc le spectre a au moins deux éléments distincts (par exemple une symétrie par rapport à un hyperplan) : ces derniers ne peuvent appartenir à $\mathscr{A}'$. Cela implique que $\mathscr{A}' \neq L(E)$: le théorème de Burnside implique donc que $\mathscr{A}'$ est réductible. C'est *a fortiori* le cas de $\mathscr{A}$.

(31) (b) Notons $\mathscr{P}$ la propriété « être une algèbre d'endomorphismes formée d'endomorphismes tous nilpotents ». Comme mentionné par l'énoncé, cette propriété est transmise par passage au quotient. La question précédente montre que l'hypothèse de la question (29) est satisfaite : cette dernière implique donc que $\mathscr{A}$ est co-trigonalisable.

Remarque. On pouvait aussi appliquer le théorème de Kolchin au sous-groupe $\mathsf{Id}_E + \mathscr{A}$ de $\mathsf{GL}(E)$.

(32) (a) Prenons $B = E_{1,2}$ et $C = E_{2,1}$: la matrice $BC - CB = E_{1,1} - E_{2,2}$ n'est psa nilpotente.

(32) (b) Soient E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{A}$ une sous-algèbre de $L(E)$ ayant la propriété $\mathscr{P}$ et $G \subset F \subset E$ des sous-$\mathbf{C}$-espaces vectoriels stables par tous les éléments de $\mathscr{A}$. Soient $f, g \in \mathscr{A}$: on dispose des endomorphismes $\overline{f}, \overline{g} \in L(F/G)$ induits par f et g. L'endomorphisme $\overline{f} \circ \overline{g} - \overline{g} \circ \overline{f}$ est induit par $f \circ g - g \circ f$: comme ce dernier est nilpotent, il en est de même de $\overline{f} \circ \overline{g} - \overline{g} \circ \overline{f}$. Cela montre que $\mathscr{P}$ est transmise par passage au quotient.

(32) (c) Les question (a) et (b) qui précèdent montrent que les hypothèses de la question (29) sont satisfaites : les éléments de $\mathscr{A}$ sont co-trigonalisables.

(33) Notons $\mathscr{P}$ la propriété « être une algèbre d'endomorphismes formée d'endomorphismes deux à deux co-trigonalisables ». Le fait de commuter est transmis par passage au quotient : cela montre que la propriété $\mathscr{P}$ est transmise par passage au quotient. Par ailleurs, si E est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension ≥ 2 et $\mathscr{A}$ une sous-algèbre de $L(E)$ ayant la propriété $\mathscr{P}$, alors $\mathscr{A} \neq L(E)$ (comme $\dim_{\mathbf{C}}(E) \geq 2$, il existe $f, g \in L(E)$ non codiagonalisables) : le théorème de Burnside implique que $\mathscr{A}$ est réductible. Là encore, les hypothèses de la question (29) sont satisfaites : toute algèbre d'endomorphismes qui vérifie la propriété $\mathscr{P}$ est co-trigonalisable.

(34) (a) Si A et B sont co-trigonalisables, il existe $P \in \mathsf{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que PAP^{-1} et PBP^{-1} soient triangulaires supérieures : pour tout $p(X,Y)$ polynôme à coefficients dans $\mathbf{C}$ en deux variables X et Y non commutatives, les matrices

$$\begin{aligned} Pp(A,B)P^{-1} &= p(PAP^{-1}, PBP^{-1}) \\ P(AB - BA)P^{-1} &= (PAP^{-1})(PBP^{-1})(PAP^{-1}) - (PBP^{-1})(PAP^{-1}) \end{aligned}$$

sont triangulaires supérieures, et la deuxième est à coefficients diagonaux nuls. Cela implique que la matrice $Pp(A,B)(AB - BA)P^{-1}$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux nuls : elle est nilpotente. Il en est donc de même de $p(A,B)(AB - BA)$.

(34) (b) La sous-algèbre $\mathbf{C}[A,B]$ de $\mathsf{M}_n(\mathbf{C})$ engendrée par A et B est commutative : la question (30) implique qu'elle est co-trigonalisable. En particulier, A et B sont co-trigonalisables.

(34) (c) Comme $AB - BA \neq 0$, il existe $X \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $(AB - BA)X$ soit non nul. Comme $\mathsf{GL}_n(\mathbf{C})$ agit transitivement sur $\mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ (cela résulte du théorème de la base incomplète), il existe $C \in \mathsf{GL}_n(\mathbf{C}) \subset \mathsf{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $C(AB - BA)X = X$.

(34) (d) Supposons $\mathscr{A}$ irréductible. Comme $AB \neq BA$, on a $n \geq 2$: le théorème de Burnside implique que $\mathscr{A} = \mathsf{M}_n(\mathbf{C}) \ni C$ (où C est la matrice de la question précédente). Comme $\mathscr{A}$ est l'ensemble des matrices de la forme $p(A,B)$ avec $p(X,Y)$ un polynôme à coefficients dans $\mathbf{C}$ en deux variables X et Y non commutatives, on peut écrire $C = p(A,B)$. Comme la propriété (2) est supposée vraie, cela implique que la matrice $C(AB-BA) = p(A,B)(AB-BA)$ est nilpotente. C'est contradictoire vu qu'elle a la valeur propre 1 (*cf* question précédente). Cela implique que $\mathscr{A}$ est réductible.

(34) (e) Tout comme la nilpotence, la propriété (2) est transmise par passage au quotient. La question précédente montre en outre que la condition de la question (29) est vérifiée. Cela implique que $\mathscr{A}$ est co-trigonalisable : il en est de même de A et B.

(35) (a) D'après la propriété (3), la matrice $M_1M_2\cdots M_m(AB-BA)$ est nilpotente : sa trace est nulle.

(35) (b) Là encore, l'hypothèse $AB \neq BA$ implique que $n \geq 2$. Supposons $\mathscr{A}$ irréductible : d'après le théorème de Burnside, on a $\mathscr{A} = \mathsf{M}_n(\mathbf{C})$. De nouveau, tout élément de $\mathsf{M}_n(\mathbf{C})$ peut s'écrire $p(A,B)$ avec $p(X,Y)$ un polynôme à coefficients dans $\mathbf{C}$ en deux variables X et Y non commutatives. Par linéarité, la question précédente implique donc que pour tout $M \in \mathsf{M}_n(\mathbf{C})$, on a $\mathrm{Tr}(M(AB-BA)) = 0$. Comme $AB - BA \neq 0$, il existe $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ tel que la composante λ d'indice (i,j) de $AB-BA$ soit non nulle. On a alors $E_{1,i}(AB-BA)E_{j,1} = \lambda E_{1,1}$, donc

$$\mathrm{Tr}(E_{j,i}(AB-BA)) = \mathrm{Tr}(E_{j,1}E_{1,i}(AB-BA)) = \mathrm{Tr}(E_{1,i}(AB-BA)E_{j,1}) = \lambda \neq 0$$

ce qui est contradictoire. On a donc montré que $\mathscr{A}$ est réductible.

(35) (c) Un raisonnement identique à celui de la question (34) (e) montre que $\mathscr{A}$ est co-trigonalisable : il en est de même de A et B.

(36) • S'il existe $P \in \mathsf{U}_n(\mathbf{C})$ (donc telle que $P^{-1} = P^*$) et $D \in \mathsf{M}_n(\mathbf{C})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$, on a $A^* = P^{-1*}D^*P^* = PD^*P^{-1}$, d'où $AA^* - A^*A = P(DD^* - D^*D)P^{-1} = 0$, ce qui implique que A est normale.

• Réciproquement, supposons A normale. Les matrices A et A^* commutent : elles sont co-trigonalisables : il existe $P \in \mathsf{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que PAP^{-1} et PA^*P^{-1} soient triangulaires supérieures. En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux colonnes de P, on construit une matrice T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux dans $\mathbf{R}_{>0}$ et $\Omega \in \mathsf{U}_n(\mathbf{C})$ telle que $P = T\Omega$. D'après ce qui précède, les matrices $T\Omega A\Omega^{-1}T^{-1}$ et $T\Omega A^*\Omega^{-1}T^{-1}$ sont triangulaires supérieures : il en est de même des matrices $\Omega A\Omega^{-1}$ et $\Omega A^*\Omega^{-1} = (\Omega A\Omega^{-1})^*$. La deuxième est donc aussi triangulaire inférieure (adjointe d'une matrice triangulaire supérieure) : elle est diagonale. Cela montre que A est unitairement diagonalisable.

(37) (a) Comme $AB = 0$, les monômes non nuls en A et B sont de la forme B^pA^q avec $p,q \in \mathbf{N}$. Par ailleurs, on a $B^pA^q(AB-BA) = -B^pA^qBA = 0$ si $q > 0$. Par ailleurs, si $q = 0$, on a

$$(B^pA^q(AB-BA))^2 = (-B^{p+1}A)^2 = B^{p+1}AB^{p+1}A = 0.$$

Dans tous les cas, $B^pA^q(AB-BA)$ est nilpotent et le critère de Mc Coy raffiné (*cf* question (35)) implique que A et B sont co-trigonalisables.

Remarque. On peut éviter le recours au critère de Mc Coy raffiné en utilisant directement le lemme fondamental de la co-trigonalisation (*cf* question (29)) : il suffit d'observer que la propriété $AB = 0$ est transmise par passage au quotient, et que si $n \geq 2$, l'ensemble $\{A,B\}$ est réductible, *i.e.* qu'il existe un sous-$\mathbf{C}$-espace vectoriel $\{0\} \subsetneq F \subsetneq \mathbf{C}^n$ stable par A et B : c'est trivial si A est un homothétie (il suffit de prendre pour F une droite propre pour B), et sinon un sous-espace propre F de A.

(37) (b) Comme A et B commutent à $C := AB-BA$, on a $C^k = C^{k-1}(AB-BA) = A(C^{k-1}B)-(C^{k-1}B)A$ et donc $\mathrm{Tr}(C^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}_{>0}$. Cela implique que C est nilpotente. Si $p(X,Y)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbf{C}$ en deux variables X et Y non commutatives et $M = p(A,B)$, l'hypothèse implique que les matrices M et C commutent. Cela implique que $(MC)^n = M^nC^n = 0$ vu que $C^n = 0$, Les matrices $p(A,B)C$ sont donc toutes nilpotentes : d'après le théorème de Mc Coy, les matrices A et B sont co-trigonalisables.

(37) (c) Un récurrence immédiate implique que $AB^k - B^kA = kB^k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Cela implique que $k\,\mathrm{Tr}(B^k) = 0$ et donc que $\mathrm{Tr}(B^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}_{>0}$: il en résulte que B est nilpotente. Comme $BA = (A - I_n)B$, si $M_1,\ldots,M_m \in \{A,B\}$, on a

$$M_1\cdots M_m(AB-BA) = M_1\cdots M_mB \in \mathbf{C}[A]B^{k+1}$$

où k est le nombre de matrices M_i égales à B. Cela implique que $(M_1\cdots M_m(AB-BA))^n \in \mathbf{C}[A]B^{n(k+1)} = 0$ vu que $B^n = 0$. Les matrices $M_1\cdots M_m(AB-BA)$ sont toutes nilpotentes : le critère de Mc Coy raffiné (*cf* question (35)) implique que A et B sont co-trigonalisables.

Remarque. On peut éviter le recours au critère de Mc Coy raffiné en utilisant directement le lemme fondamental de la co-trigonalisation (*cf* question (29)) : il suffit d'observer que la propriété $AB - BA = B$ est transmise par passage au quotient, et que si $n \geq 2$, l'ensemble $\{A, B\}$ est réductible : c'est trivial si $B = 0$, sinon $\{0\} \subset \mathrm{Ker}(B) \subset \mathbf{C}^n$ est stable par A.

(37) (d) Dans le cas où $\alpha = \beta = 0$, cela résulte de la question (30) : supposons désormais que α et β ne sont pas tous les deux nuls. Quitte à échanger A et B, on peut supposoer que $\beta \neq 0$. Posons $A' = \frac{A}{\beta}$ et $B' = \frac{\alpha}{\beta}A+B$: on a $A'B'-B'A' = \frac{A}{\beta}\big(\frac{\alpha}{\beta}A+B\big)-\big(\frac{\alpha}{\beta}A+B\big)\frac{A}{\beta} = \frac{AB-BA}{\beta} = B'$. D'après la question précédente, les matrices A' et B' sont co-trigonalisables : il en est de même de A et B.