Université de Bordeaux

Master Agrégation
Révisions de théorie des groupes

Exercice 1. Soit $*$ une loi de composition sur un ensemble G qui est associative. On suppose qu'il existe $e \in G$ tel que pour tout $x \in G$, on ait $e*x = x$, et il existe $y \in G$ tel que $y*x = e$. Montrer que $(G, *)$ est un groupe.

Exercice 2. Soient G un groupe et $H \subset G$ une partie finie non vide stable par la loi de groupe. Montrer que H est un sous-groupe de G. Qu'en est-il si H est infini ?

Exercice 3. Soient G un groupe et e son élément neutre.

(1) Montrer que si $x^2 = e$ pour tout $x \in G$, alors G est abélien.
(2) Si $x^3 = e$ pour tout $x \in G$, le groupe G est-il nécessairement abélien ?

Exercice 4. Déterminer tous les morphismes de groupes $(\mathbf{Q}, +) \to (\mathbf{Z}, +)$, puis tous les morphismes de groupes $(\mathbf{Q}, +) \to (\mathbf{Q}^\times, \times)$.

Exercice 5. Soient G un groupe et $x, y \in G$ d'ordre n et m respectivement. On suppose $xy = yx$ et $\mathsf{pgcd}(n, m) = 1$. Quel est l'ordre de xy ? Est-ce encore vrai lorsque l'une des hypothèses n'est pas vérifiée ?

Exercice 6. Montrer que tout groupe d'ordre n est engendré par une partie de cardinal inférieur à $\log_2(n)$.

Exercice 7. Montrer que le groupe $(\mathbf{Q}, +)$ n'est pas de type fini (*i.e.* engendré par un nombre fini d'éléments).

Exercice 8. Montrer que si H et K sont deux sous-groupes stricts de G, on a $H \cup K \neq G$.

Exercice 9. Soit G un groupe.
(1) On suppose que G possède un nombre fini de sous-groupes. Montrer que G est fini.
(2) Le résultat de la question précédente subsiste-t-il en remplaçant « fini » par « dénombrable » ?

Exercice 10. Soient G un groupe, H et K deux sous-groupes finis de G. Montrer que le cardinal du sous-groupe de G engendré par H et K est supérieur ou égal à $\frac{\#H\#K}{\#(H\cap K)}$.

Exercice 11. Soient G un groupe et H un sous-groupe d'indice 2. Montrer que H est distingué dans G.

Exercice 12. Soient G un groupe et H un sous-groupe d'indice 5. On suppose qu'il existe au moins une classe à gauche modulo H distincte de H qui est une classe à droite modulo H. Montrer que H est distingué dans G.

Exercice 13. Montrer que le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 6.

Exercice 14. Soient G un groupe fini, H un sous-groupe distingué de G et $n \in \mathbf{N}_{>0}$ un entier tel qu'il existe un élément d'ordre n dans G/H. Prouver que G contient un élément d'ordre n.

Exercice 15. Soit G un groupe. On note C (resp. D) le sous-groupe de G engendré par $\{g^2\}_{g\in G}$ (resp. $\{ghg^{-1}h^{-1}\}_{g,h\in G}$). Montrer que C et D sont distingués dans G, puis que $D \subset C$.

Exercice 16. Soient G un groupe fini, $H \leqslant G$ et N un sous-groupe distingué de G.
(1) Montrer que $HN \leqslant G$.
(2) Montrer que $H/(H \cap N) \xrightarrow{\sim} HN/N$.
(3) On suppose que $\#H$ et $[G : N]$ sont premiers entre eux. Montrer que $H \leqslant N$.

Exercice 17. Soit p un nombre premier. Montrer qu'un groupe d'ordre $2p$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2p\mathbf{Z}$ ou au groupe diédral D_{2p}.

Exercice 18. Soient $m, n \in \mathbf{N}_{>0}$.
(1) Montrer que $m(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}/\frac{n}{\mathsf{pgcd}(m,n)}\mathbf{Z}$.
(2) Montrer que $\mathbf{Z}/nm\mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ si et seulement si $\mathsf{pgcd}(n, m) = 1$.
(3) Déterminer $\mathsf{Hom}_{\mathsf{gr}}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$.

Exercice 19. (1) Montrer que $\mathsf{Aut}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \simeq (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$.
(2) Montrer que si p est premier $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$ est cyclique.
(3) Montrer que si $\alpha \in \mathbf{N}_{>0}$ et $p > 2$ est premier, alors $(\mathbf{Z}/p^\alpha\mathbf{Z})^\times \simeq \mathbf{Z}/p^{\alpha-1}(p-1)\mathbf{Z}$ est cyclique.

Exercice 20. Déterminer tous les morphismes de groupes $\mathfrak{S}_n \to \mathbf{C}^\times$.

Exercice 21. $\mathfrak{S}_9$ contient un élément d'ordre 20, mais pas d'élément d'ordre 18.

Exercice 22. (1) Démontrer que deux éléments de $\mathfrak{S}_n$ sont conjugués si et seulement si pour tout $k \in \mathbf{N}_{>0}$, leurs décompositions en produit de cycles à supports disjoints ont le même nombre de k-cycles.
(2) Décrire les classes de conjugaison des groupes $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_5$. Écrire l'équation aux classes pour chacun de ces groupes.
(3) Montrer que $\mathfrak{A}_5$ est simple.
(4) Montrer que si $n \geqslant 5$, alors $\mathfrak{A}_n$ est simple.

Exercice 23. Soient G un groupe fini et $H \leqslant G$ un sous-groupe distingué. On suppose H cyclique d'ordre n. On suppose que $\mathsf{pgcd}(\varphi(n), [G : H]) = 1$. En construisant un morphisme $G/H \to \mathsf{Aut}(H)$ convenable, montrer que H est contenu dans le centre de G.

Exercice 24. Soient G un groupe agissant sur un ensemble E et $\varphi\colon G \to \mathfrak{S}_E$ la représentation de permutation associée.
(1) Montrer que $\mathsf{Ker}(\varphi) = \bigcap_{x \in E} \mathsf{stab}_G(x)$. En déduire que si l'action est transitive, on a $\mathsf{Ker}(\varphi) = \bigcap_{g \in G} g\,\mathsf{stab}_G(x)g^{-1}$ pour tout $x \in E$.
Désormais, on suppose que G agit par translation à gauche sur $E := G/H$.
(2) Si $g \in G$, quel est le stabilisateur de gH ?
(3) Montrer qu'on a $\mathsf{Ker}(\varphi) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$, et que H est distingué dans G si et seulement si $\mathsf{Ker}(\varphi) = H$.
(4) On suppose que tout facteur premier de $\#H$ est $\geqslant [G : H]$. Montrer que H est distingué dans G.

Exercice 25. Soit G un groupe et H un sous-groupe d'indice n. Montrer que H contient un sous-groupe K de G distingué et tel que $[G : K]$ divise $n!$.

Exercice 26. (1) Soient G un groupe et $\mathsf{Z}(G)$ son centre. Montrer que si $G/\mathsf{Z}(G)$ est monogène, alors G est abélien.

Soit p un nombre premier.

(2) Montrer que le centre d'un p-groupe non trivial est non trivial.
(3) Classifier les groupes d'ordre p^2 à isomorphisme près.

Exercice 27. Soient p et q deux nombres premiers tels que $p < q$, que q ne divise pas $p^2 - 1$ et p ne divise pas $q - 1$. Soit G un groupe d'ordre p^2q. Montrer que G est abélien. Application : montrer qu'un groupe d'ordre 99 est abélien. Classifier les groupes d'ordre 99 à isomorphisme près.

Exercice 28. (Cauchy). Soient G un groupe fini et p un nombre premier divisant $\#G$. Montrer que G contient un élément d'ordre p [indication : faire agir convenablement $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ sur l'ensemble $X := \{(g_1, \ldots, g_p) \in G^p \,;\, g_1 \cdots g_p = e\}$].

Exercice 29. (Les théorèmes de Sylow : la preuve de Wielandt). Soit p un nombre premier.
(1) Soient $r \in \mathbf{N}$ et $m \in \mathbf{N}_{>0}$. En considérant le coefficient de T^{p^r} dans le polynôme $\left(T^{p^r} + 1\right)^m$, montrer que $\binom{p^r m}{p^r} \equiv m \mod p$.

Supposons $p \nmid m$ et soit G un groupe d'ordre $p^r m$. On fait agir G par translations à gauche sur l'ensemble $\mathscr{X}$ des parties de cardinal p^r dans G.

(2) Montrer qu'il existe $X \in \mathscr{X}$ dont l'orbite est de cardinal premier à p.
(3) Montrer que $p^r \mid \#\,\mathsf{stab}_G(X)$.
(4) En faisant agir $\mathsf{stab}_G(X)$ sur X par translations, montrer que $\#\,\mathsf{stab}_G(X) \mid p^r$, et conclure que G admet un p-Sylow.

D'après ce qui précède, l'ensemble $\mathsf{Syl}_p(G)$ des p-Sylow n'est pas vide : fixons $S_0 \in \mathsf{Syl}_p(G)$. Posons $n_p(G) = \#\,\mathsf{Syl}_p(G)$.

(5) Soit H un p-sous-groupe de G. En faisant agir H sur G/S_0 par translations, montrer que H est inclus dans un conjugué de S_0. En déduire que les p-Sylow de G sont conjugués entre eux, puis que $n_p(G) \mid \#G$.
(6) On fait agir S_0 sur $\mathsf{Syl}_p(G)$ par conjugaison. Montrer que S_0 est l'unique point fixe pour cette action. En déduire que $n_p(G) \equiv 1 \mod p$.

Exercice 30. Soient G un groupe fini, $H \leqslant G$ un sous-groupe et p un nombre premier. Soit Q un p-Sylow de H. Montrer qu'il existe un p-Sylow S de G tel que $Q = S \cap H$.