Université de Bordeaux

Master Agrégation
Révisions d'algèbre linéaire

Dans toute la suite K désigne un corps commutatif.

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel sur un corps K et $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels *stricts* de E tels que $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. Montrer que K est fini.

Exercice 2. Soit E un K-espace vectoriel. Rappeler la définition des notions suivantes :
(i) famille génératrice.
(ii) famille libre.
(iii) famille génératrice minimale.
(iv) famille libre maximale.
Quelle relation y a-t-il entre les deux dernières notions ?

Exercice 3. (1) Est-ce que $\mathbf{C}$ est de dimension finie sur $\mathbf{Q}$? On note Π l'ensemble des nombres premiers. Montrer que la famille $\{\log(p)\}_{p\in\Pi}$ est libre sur $\mathbf{Q}$.
(2) Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
(a) À tout $\alpha \in \mathbf{R}$, on associe l'application $f_\alpha \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f_\alpha(x) = x - \alpha$. Montrer que la famille $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{R}}$ est liée.
(b) À tout $\alpha \in \mathbf{R}$, on associe l'application $g_\alpha \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $g_\alpha(x) = |x - \alpha|$. Montrer que la famille $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{R}}$ est libre (indication possible : examiner la dérivabilité des fonctions mises en jeu).

Exercice 4. (Invariance du cardinal des bases)
(1) Soient E un espace vectoriel et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille finie d'éléments de E. Montrer que toute famille $(f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1})$ d'éléments de $\mathsf{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est liée.
(2) Soit E est un espace vectoriel de génération finie. Montrer qu'il existe au moins une base et que toutes les bases ont même cardinal.
(3) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F est aussi de dimension finie. Que vaut $\dim E/F$?
(4) Déduire de ce qui précède le théorème du rang : si E, E' sont deux espaces vectoriels et $u \colon E \to E'$ une application linéaire, alors

$$\dim_K(E) = \dim_K(\mathsf{Ker}(u)) + \dim_K(\mathsf{Im}(u)).$$

(5) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$\dim_K(F+G) = \dim_K(F) + \dim_K(G) - \dim_K(F \cap G).$$

(6) Soient $Y \subset X$ deux parties finies et non vides d'un K-espace vectoriel E. On pose $\mathsf{Card}(X) = n$, $\mathsf{Card}(Y) = m$, $\mathsf{rg}(X) = r$ et $\mathsf{rg}(Y) = s$. Montrer que $m - s \leqslant n - r$.

Exercice 5. Soient $F_1, \dots, F_k$ des sous K-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E de dimension finie.
(1) On suppose que $E = F_1 + \cdots + F_k$ et $\dim_K(E) = \dim_K(F_1) + \cdots + \dim_K(F_k)$. Montrer que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$.
(2) Vrai ou faux : si $F_1, \dots, F_k$ sont des sous K-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E tels que $E = F_1 + \cdots + F_k$ et $F_i \cap F_j = \{0\}$ si $i \neq j$, alors $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$?

Exercice 6. Le théorème de la base incomplète affirme que

Si E est un espace vectoriel sur un corps K, si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E et $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ une famille libre, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

(1) Démontrer ce résultat lorsque $\mathcal{G}$ est fini.
(2) Montrer, en utilisant le théorème admis de la base incomplète, que tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E admet un *supplémentaire*, *i.e.* un sous-espace G tel que $E = F \oplus G$.

Exercice 7. Soient E un K-espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel.
(1) Montrer que tous les supplémentaires de H sont isomorphes.
(2) On dit que H est hyperplan de E si sa codimension est 1, *i.e.* $\dim E/H = 1$.
 (a) Montrer que H est un hyperplan de E si et seulement si il admet un supplémentaire de dimension 1.
 (b) Montrer que H est un hyperplan de E si et seulement si il est égal au noyau d'une forme linéaire non nulle.
 (c) Montrer que tout sous-espace strict de E est égal à l'intersection des hyperplans qui le contiennent.

Exercice 8. Soient E un espace vectoriel de dimension n, $F_1, F_2, \ldots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de V avec $\dim_K(F_1) + \dim_K(F_2) + \cdots + \dim_K(F_r) > (r-1)n$. Montrer que $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_r \neq \{0\}$.

Exercice 9. Soit $V = K^{\mathbf{N}}$ l'espace des suites à valeurs dans le corps K. Pour $q \in K^\times$ on pose $g^{(q)} = (q^n)_{n\in\mathbf{N}}$. Montrer que la famille $\{g^{(q)}\}_{q\in K^\times}$ est libre.

Exercice 10. Dans $V = \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$, on considère la famille des fonctions $x \mapsto e^{ax}$, pour $a \in \mathbf{R}$. Montrer que c'est une famille libre.

Exercice 11. Soit f un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E. On pose $f^0 = \mathsf{Id}_E$ et $f^k = f \circ f^{k-1}$ pour tout entier $k \geqslant 1$.
(1) Montrer que $\big(\mathsf{Ker}(f^k)\big)_{k\in\mathbf{N}}$ et $\big(\mathsf{Im}(f^k)\big)_{k\in\mathbf{N}}$ sont des suites respectivement croissante et décroissante de sous-espaces de E stables par f.
(2) Montrer que

$$\mathsf{Ker}(f^k) = \mathsf{Ker}(f^{k+1}) \Rightarrow (\forall m \geqslant k)\ \mathsf{Ker}(f^m) = \mathsf{Ker}(f^k)$$
$$\mathsf{Im}(f^k) = \mathsf{Im}(f^{k+1}) \Rightarrow (\forall m \geqslant k)\ \mathsf{Im}(f^m) = \mathsf{Im}(f^k).$$

(3) Montrer successivement :
 (a) $\mathsf{Im}(f) = \mathsf{Im}(f^2) \Leftrightarrow E = \mathsf{Ker}(f) + \mathsf{Im}(f)$;
 (b) $\mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \mathsf{Ker}(f) \cap \mathsf{Im}(f) = \{0\}$;
 (c) $E = \mathsf{Ker}(f) \oplus \mathsf{Im}(f) \Leftrightarrow \big(\mathsf{Im}(f) = \mathsf{Im}(f^2)$ et $\mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Ker}(f^2)\big)$.
(4) Soit r (resp. s) le plus petit entier k tel que $\mathsf{Im}(f^k) = \mathsf{Im}(f^{k+1})$ (resp. le plus petit entier k tel que $\mathsf{Ker}(f^k) = \mathsf{Ker}(f^{k+1})$), *à supposer qu'ils existent.* On souhaite monter que $r = s$.
 (a) Montrer que si $k \in \mathbf{N}$ est tel que $\mathsf{Im}(f^k) = \mathsf{Im}(f^{k+1})$ et $\mathsf{Ker}(f^{k+1}) = \mathsf{Ker}(f^{k+2})$, alors $\mathsf{Ker}(f^k) = \mathsf{Ker}(f^{k+1})$. En déduire que $s \leqslant r$.
 (b) Montrer que si $k \in \mathbf{N}$ est tel que $\mathsf{Ker}(f^k) = \mathsf{Ker}(f^{k+1})$ et $\mathsf{Im}(f^{k+1}) = \mathsf{Im}(f^{k+2})$, alors $\mathsf{Im}(f^k) = \mathsf{Im}(f^{k+1})$. En déduire que $s \geqslant r$ et conclure.
 (c) Montrer que $E = \mathsf{Ker}(f^r) \oplus \mathsf{Im}(f^r)$, que la restriction de f à $\mathsf{Ker}(f^r)$ est nilpotente, et que la restriction de f à $\mathsf{Im}(f^r)$ est un automorphisme.

(5) On suppose que E est de dimension finie n. Montrer qu'alors r et s existent et que l'on a $r = s \leqslant n$.
(6) Donner un exemple (nécessairement en dimension infinie !) d'endomorphisme satisfaisant l'une des propriétés suivantes :
  (a) r existe mais pas s ;
  (b) s existe mais pas r ;
  (c) ni r, ni s n'existent.
(7) On suppose que E est de dimension finie n. Pour tout $k \in \mathbf{N}$ on pose

$$\begin{cases} n_k = \dim_K(\mathsf{Ker}(f^k)) \\ i_k = \dim_K(\mathsf{Im}(f^k)) \end{cases}$$

  (a) Que vaut la somme $n_k + i_k$?
  (b) Pour $k \in \mathbf{N}$, on pose $\delta_k = n_{k+1} - n_k$. Montrer que la suite $(\delta_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est décroissante.

Exercice 12. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathsf{End}_K(E)$ deux endomorphismes qui commutent. Montrer que $\mathsf{Ker}(u) \cap \mathsf{Ker}(v) = \{0\} \Leftrightarrow \mathsf{Im}(u) + \mathsf{Im}(v) = E$.

Exercice 13. Soit E et F des K-espaces vectoriels de dimensions respectives n et p, et $f \in \mathsf{Hom}_K(E, F)$ de rang r. Calculer la dimension du sous-espace

$$A = \{g \in \mathsf{Hom}_K(F, E) \, ; \, f \circ g \circ f = 0\}$$

de $\mathsf{Hom}_K(F, E)$.

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel sur un corps K.
(1) Montrer que $E \simeq E^*$ si E est dimension finie. Un tel isomorphisme dépend du choix d'une base.
(2) Si $E = K[X]$, montrer que E^* est isomorphe à $K^{\mathbf{N}}$.
(3) Dans cette question, on suppose E de dimension infinie et muni d'une base $(e_i)_{i \in I}$. Montrer que la famille « duale » $(e_i^*)_{i \in I}$ (définie par les relations habituelles $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$) est une famille libre mais non génératrice de E^*.
(4) Montrer que l'application $E \to (E^*)^*$; $v \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(v))$ (évaluation en v) est injective, et que c'est un isomorphisme si (et seulement si) E est de dimension finie.

Exercice 15. Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K et E^* son dual. Pour tout sous-espace V de E, on note pose $V^{\perp} = \{\varphi \in E^* \, ; \, (\forall x \in V) \, \varphi(x) = 0\}$. On rappelle également qu'à une application linéaire $f \colon E \to F$ est associée l'application linéaire *transposée* ${}^t f \colon F^* \to E^*$ définie par ${}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$ pour tout $\varphi \in F^*$. On suppose E et F de dimension finie et on les munit de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ respectivement. On note enfin $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{C}^*$ les bases duales correspondantes.
(1) Montrer que pour tout sous-espace V de E, on a $\dim_K(V) + \dim_K(V^{\perp}) = \dim_K(E)$.
(2) Si V est un sous-espace de E et f un endomorphisme de E, montrer que V est stable par f si et seulement si $V^{\perp}$ est stable par ${}^t f$.
(3) Quelle relation y a-t-il entre la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et celle de ${}^t f$ dans les bases $\mathcal{C}^*$ et $\mathcal{B}^*$?
(4) Quelle relation y a-t-il entre $\mathsf{Ker}({}^t f)$ et $\mathsf{Im}(f)^{\perp}$ d'une part, $\mathsf{Im}({}^t f)$ et $\mathsf{Ker}(f)^{\perp}$ d'autre part ?
(5) Utiliser ce qui précède pour retrouver une relation (bien connue) entre le rang d'une matrice et celui de sa transposée.

Exercice 16. Soient E un espace vectoriel et $u, v \in \mathsf{End}_K(E)$.
(1) Montrer qu'il existe $w \in \mathsf{End}_K(E)$ tel que $u = w \circ v$ si et seulement si $\mathsf{Ker}(v) \subset \mathsf{Ker}(u)$.
(2) Montrer qu'il existe $w \in \mathsf{End}_K(E)$ tel que $u = v \circ w$ si et seulement si $\mathsf{Im}(u) \subset \mathsf{Im}(v)$.

Exercice 17. Soit $E = K[X]_n$ l'espace des polynômes à coefficients dans K de degré au plus n. Si K est fini, on suppose qu'il possède au moins $n+1$ éléments. Soient alors $a_0, \ldots, a_n \in K$ deux à deux distincts.
(1) Montrer que les formes linéaires $\delta_i \colon E \to K;\ P(X) \mapsto P(a_i)$ constituent une base de E^*. Quelle est la base antéduale ?
(2) Soit $P(X) \in K[X]$ de degré exactement n. On suppose en outre que la caractéristique de K est nulle. Montrer que les polynômes $P_i(X) := P(X + a_i)$ forment une base de E.

Exercice 18. Soit E un K-espace vectoriel et E^* son dual. Si F est un sous-espace de E et G un sous-espace de E^*, on pose

$$F^{\perp} = \{\varphi \in E^* \,;\, (\forall x \in F)\, \varphi(x) = 0\} \text{ et } G^{\circ} = \{x \in E\,;\, (\forall \varphi \in G)\, \varphi(x) = 0\}.$$

(1) Supposons que $E = F \oplus H$.
  (a) Montrer que $E^* = F^{\perp} \oplus H^{\perp}$.
  (b) En déduire que $\left(F^{\perp}\right)^{\circ} = F$.
(2) Si G est un sous-espace de E^*, montrer que $(G^{\circ})^{\perp} \supset G$ mais que l'inclusion peut être stricte si E n'est pas de dimension finie.
(3) Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces de E. Montrer que :
  (i) $(F_1 + F_2)^{\perp} = F_1^{\perp} \cap F_2^{\perp}$;
  (ii) $(F_1 \cap F_2)^{\perp} = F_1^{\perp} + F_2^{\perp}$.
(4) Soient G_1 et G_2 deux sous-espaces de E^*. Montrer que :
  (i) $(G_1 + G_2)^{\circ} = G_1^{\circ} \cap G_2^{\circ}$;
  (ii) $(G_1 \cap G_2)^{\circ} \supset G_1^{\circ} + G_2^{\circ}$.
Montrer qu'en dimension infinie, la deuxième inclusion peut être stricte.

Exercice 19. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n.
(1) Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de formes linéaires sur E. Montrer que

$$\dim_K \Big(\bigcap_{i \in I} \mathsf{Ker}(f_i) \Big) = n - \mathsf{rg}\{f_i\}_{i \in I}.$$

(2) Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Montrer que $\dim_K(F) = m$ si et seulement s'il existe $f_1, \ldots, f_{n-m} \in E^*$ linéairement indépendantes telles que $F = \bigcap_{i=1}^{n-m} \mathsf{Ker}(f_i)$.
(3) Soient F un sous espace vectoriel et H un hyperplan de E. Montrer que $\dim_K(F \cap H) = \dim_K(F) - 1$ si $F \not\subset H$.
(4) Soit $(H_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille d'hyperplans de E, et pour chaque $i \in \{1, \ldots, p\}$, une forme linéaire f_i telle que $H_i = \mathsf{Ker}(f_i)$. Montrer que $n - p \leqslant \dim_K \left(\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant p} H_i \right) \leqslant n - 1$.
(5) Soient $f_1, f_2, \ldots, f_p, g \in E^*$. Montrer que $\bigcap_{i=1}^{p} \mathsf{Ker}(f_i) \subset \mathsf{Ker}(g) \Leftrightarrow g \in \mathsf{Vect}(f_1, \ldots, f_p)$.

Exercice 20. Soient K un corps et $\mathscr{F}(K, K)$ l'ensemble des applications de K dans lui-même, muni de sa structure de K-espace vectoriel naturelle. Soient $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{F}(K, K)$ *linéairement indépendants* et $E = \mathsf{Vect}(f_1, \ldots, f_n)$
(1) À tout $a \in K$ on associe l'élément $\delta_a \in E^*$ défini par $\delta_a(f) = f(a)$ pour tout $f \in E$. Montrer que la famille $(\delta_a)_{a \in K}$ engendre E^*.
(2) En déduire qu'il existe des éléments $a_1, \ldots, a_n \in K$ tels que la matrice $(f_i(a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ soit inversible.