

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
Master Agrégation
Révisions sur les matrices

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\text{Ker}(A)$ et compléter cette base à l'aide des vecteurs e_1, \dots, e_5 de la base canonique de \mathbf{R}^5 .

Exercice 2. Inverser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 14 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soient K un corps et $n \in \mathbf{N}_{>0}$. Montrer que toute forme linéaire sur $M_n(K)$ est de la forme $M \mapsto \text{Tr}(AM)$ avec $A \in M_n(K)$.

Exercice 4. Déterminer les formes linéaires f sur $M_n(\mathbf{R})$ telle que

$$(\forall A, B \in M_n(\mathbf{R})) f(AB) = f(BA).$$

Exercice 5. Soient K un corps et $n \in \mathbf{N}_{>0}$. Montrer que les seul idéaux bilatères de $A = M_n(K)$ sont $\{0\}$ et A .

Exercice 6. Soient K un corps et $n \in \mathbf{N}_{>0}$. Quel est le sous-espace vectoriel de $M_n(K)$ engendré par les matrice nilpotentes ?

Exercice 7. Soient K un corps de caractéristique nulle, V un K -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \text{End}_K(V)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\text{Tr}(f) = 0$;
- (ii) il existe une base de V dans laquelle la matrice de f a ses coefficients diagonaux tous nuls;
- (iii) il existe $g, h \in \text{End}_K(V)$ tels que $f = gh - hg$.

Exercice 8. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbf{C})$ telle que $(\forall i \in \{1, \dots, n\}) |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

Exercice 9. Soient $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ et $A \in M_{2n}(\mathbf{R})$. On suppose que les coefficients diagonaux de A sont tous nuls et que les coefficients en dehors de la diagonale sont dans $\{\pm 1\}$. Montrer que A est inversible.

Exercice 10. Soit $A \in M_{p,q}(\mathbf{R})$. Montrer que $\text{rg}({}^tAA) = \text{rg}(A)$.

Exercice 11. (SKOLEM-NOETHER). Soient K un corps et Φ un automorphisme de $M_n(K)$. Montrer qu'il existe $A \in \text{GL}_n(K)$ telle que $(\forall M \in M_n(K)) \Phi(M) = A^{-1}MA$.

Exercice 12. Soient K un corps et E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}_{>0}$. On note $\mathcal{L}_n(E)$ l'ensemble des formes n -linéaires sur E : ce sont les applications $f: E^n \rightarrow K$ qui sont linéaires en chaque variable. C'est un K -espace vectoriel sur lequel le groupe symétrique \mathfrak{S}_n agit par

$$(\sigma \cdot f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

pour tout $f \in \mathcal{L}_n(E)$, $x_1, \dots, x_n \in E$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Rappelons qu'on dit que f est *antisymétrique* (resp. *alternée*) si $\sigma \cdot f = \varepsilon(\sigma)f$, où $\varepsilon: \mathfrak{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$ est la signature (resp. si f s'annule sur tout n -uplet dont deux vecteurs sont égaux). L'ensemble $\mathcal{A}_n(E)$ des formes n -linéaires alternées est un sous- K -espace vectoriel de $\mathcal{L}_n(E)$.

(1) Montrer que si $f \in \mathcal{L}_n(E)$ est alternée, alors elle est antisymétrique. La réciproque est-elle vraie ?

(2) Soit $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On note $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ la base duale (caractérisée par $x = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x)e_i$ pour tout $x \in E$). Montrer que $f = f(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathfrak{B}}$ pour tout $f \in \mathcal{A}_n(E)$,

$$\text{où } \det_{\mathfrak{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \varphi_{\sigma(i)}(x_i).$$

(3) En déduire que $\mathcal{A}_n(E)$ est une droite vectorielle.

(4) Montrer que $x_1, \dots, x_n \in E$ forment une base si et seulement si $\det_{\mathfrak{B}}(x_1, \dots, x_n) \in K^\times$.

(5) Soit $u \in \text{End}_K(E)$. Montrer qu'il existe $\det(u) \in K$ tel que pour tout $f \in \mathcal{A}_n(E)$, on ait

$$f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u)f(x_1, \dots, x_n)$$

pour tout $x_1, \dots, x_n \in E$.

(6) Montrer que si $v \in \text{End}_K(V)$, on a $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$, et $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$ pour tout $\lambda \in K$.

(7) Montrer que $u \in \text{GL}(E) \Leftrightarrow \det(u) \in K^\times$.

Exercice 13. Soient E un K -espace vectoriel de dimension n , $f, g \in \text{End}_K(E)$ et \mathfrak{B} une base de E . Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que

$$\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \det_{\mathfrak{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, f(x_i), x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, g(x_j), x_{j+1}, \dots, x_n) = \lambda \det_{\mathfrak{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

pour tout $x_1, \dots, x_n \in E$.

Exercice 14. Soient K un corps, $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{M}_n(K)$.

(1) Montrer que $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}$.

(2) Montrer que $\det({}^t A) = \det(A)$.

(3) (DÉVELOPPEMENT D'UN DÉTERMINANT SELON UNE RANGÉE). On note $A_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne. Montrer que

$$\begin{cases} \det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}) & \text{(développement par rapport à la } j\text{-ème colonne)} \\ \det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}) & \text{(développement par rapport à la } i\text{-ème ligne)} \end{cases}$$

Les scalaires $\det(A_{i,j})$ (resp. $(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$) s'appellent *mineur* (resp. *cofacteur*) relatif à $a_{i,j}$.

(4) La *comatrice* de A est $\text{com}(A) = ((-1)^{i+j} \det(A_{i,j}))_{1 \leq i, j \leq n}$ (c'est la matrice des cofacteurs). Montrer que $A^t \text{com}(A) = {}^t \text{com}(A) A = \det(A) I_n$.

(5) (FORMULES DE CRAMER). Soit $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $Y \in K^n$ des vecteurs colonne. Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, notons A_j la matrice A dans laquelle la j -ème colonne a été remplacée par Y . Montrer que si $AX = Y$, on a $\det(A)x_i = \det(A_j)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Exercice 15. Soient K un corps et $a_1, \dots, a_n \in K$. Montrer que

$$V(a_1, \dots, a_n) := \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Interprétation en termes d'interpolation de Lagrange ?

Exercice 16. Soient K un corps, $A, B \in M_n(K)$ et $M = \begin{pmatrix} B & A \\ A & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(K)$. Déterminer le rang de M en fonction de A et B . Calculer son inverse lorsque M est inversible.

Exercice 17. Soient $A \in M_{3,2}(K)$, $B \in M_{2,2}(K)$ et $C \in M_{2,3}(K)$ avec $ABC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver x .

Exercice 18. Soient $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ à coefficients dans $\{\pm 1\}$. Montrer que $\det(A) \in 2^{n-1} \mathbf{Z}$

Exercice 19. (DÉTERMINANT CIRCULANT). Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbf{C}$ et $\zeta = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right) \in \mathbf{C}$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \dots & \alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta & \dots & \zeta^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \zeta^{n-1} & \dots & \zeta^{(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Calculer M^2 , $\det(M^2)$, AM et MAM . En déduire $\det(A)$.

Exercice 20. (DÉTERMINANT DE CAUCHY). Soient K un corps, $n \in \mathbf{N}_{>0}$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$ et $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in K^n$. Calculer $\det(C_{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ où $C_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = \left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Exercice 21. Soit K un corps. Déterminer les matrices $A \in M_n(K)$ vérifiant

$$(\forall M \in M_n(K)) \det(A + M) = \det(A) + \det(M).$$

En déduire que si $A, B \in M_n(K)$ sont telles que $(\forall M \in M_n(K)) \det(A + M) = \det(B + M)$, alors $A = B$.

Exercice 22. Soient $n, m \in \mathbf{N}_{>0}$ et K un corps. Si $A \in M_{n,m}(K)$ et $B \in M_{m,n}(K)$, montrer que $(-X)^m \chi_{AB}(X) = (-X)^n \chi_{BA}(X)$.

Exercice 23. Soient K un corps et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$. Si $I \subset \{1, \dots, n\}$, on note A_I la matrice extraite $(a_{i,j})_{i,j \in I}$. Montrer que $\det(A + tI_n) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\#I=n-k} \det(A_I) \right) t^k$ (en particulier, les quantités $\sum_{\#I=k} \det(A_I)$ sont invariantes par conjugaison).

Exercice 24. Soient $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ semblables dans $M_n(\mathbf{C})$ (i.e. telles qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ avec $P^{-1}AP = B$). Montrer qu'elles sont semblables dans $M_n(\mathbf{R})$. Plus généralement, si K est un corps infini, L une extension finie de K , et $A, B \in M_n(K)$ sont semblables dans $M_n(L)$, alors A et B sont semblables dans $M_n(K)$.

Exercice 25. Soient K un corps, E un K -espace vectoriel de dimension finie et $g \in \mathrm{GL}(E)$. On considère l'endomorphisme φ de $\mathrm{End}_K(E)$ donné par $\varphi(f) = g \circ f \circ g^{-1}$. Calculer $\det(\varphi)$ et $\mathrm{Tr}(\varphi)$.

Exercice 26. Soient $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ et $b_1 < \dots < b_n$ des réels. Montrer que tous les mineurs de la matrice $(e^{a_i b_j})_{1 \leq i, j \leq n}$ sont strictement positifs