Université de Bordeaux

Master Agrégation
Révisions sur les matrices

Exercice 1. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Déterminer une base de $\mathsf{Ker}(A)$ et compléter cette base à l'aide des vecteurs $e_1, \dots, e_5$ de la base canonique de $\mathbf{R}^5$.

Exercice 2. Inverser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 14 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soient K un corps et $n \in \mathbf{N}_{>0}$. Montrer que toute forme linéaire sur $\mathsf{M}_n(K)$ est de la forme $M \mapsto \mathsf{Tr}(AM)$ avec $A \in \mathsf{M}_n(K)$.

Exercice 4. Déterminer les formes linéaires f sur $\mathsf{M}_n(\mathbf{R})$ telle que

$$(\forall A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbf{R}))\, f(AB) = f(BA).$$

Exercice 5. Soient K un corps et $n \in \mathbf{N}_{>0}$. Montrer que les seul idéaux bilatères de $A = \mathsf{M}_n(K)$ sont $\{0\}$ et A.

Exercice 6. Soient K un corps et $n \in \mathbf{N}_{>0}$. Quel est le sous-espace vectoriel de $\mathsf{M}_n(K)$ engendré par les matrice nilpotentes ?

Exercice 7. Soient K un corps de caractéristique nulle, V un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathsf{End}_K(V)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathsf{Tr}(f) = 0$;

(ii) il existe une base de V dans laquelle la matrice de f a ses coefficients diagonaux tous nuls ;

(iii) il existe $g, h \in \mathsf{End}_K(V)$ tels que $f = gh - hg$.

Exercice 8. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathsf{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $(\forall i \in \{1, \dots, n\})\ |a_{i,i}| > \sum\limits_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

Exercice 9. Soient $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ et $A \in \mathsf{M}_{2n}(\mathbf{R})$. On suppose que les coefficients diagonaux de A sont tous nuls et que les coefficients en dehors de la diagonale sont dans $\{\pm 1\}$. Montrer que A est inversible.

Exercice 10. Soit $A \in \mathsf{M}_{p,q}(\mathbf{R})$. Montrer que $\mathsf{rg}({}^t\!AA) = \mathsf{rg}(A)$.

Exercice 11. (Skolem-Noether). Soient K un corps et Φ un automorphisme de $\mathsf{M}_n(K)$. Montrer qu'il existe $A \in \mathsf{GL}_n(K)$ telle que $(\forall M \in \mathsf{M}_n(K))\, \Phi(M) = A^{-1}MA$.

Exercice 12. Soient K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}_{>0}$. On note $\mathscr{L}_n(E)$ l'ensemble des *formes n-linéires* sur E : ce sont les applications $f\colon E^n \to K$ qui sont linéaires en chaque variable. C'est une K-espace vectoriel sur lequel le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit par

$$(\sigma \cdot f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

pour tout $f \in \mathscr{L}_n(E)$, $x_1, \ldots, x_n \in E$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Rappelons qu'on dit que f est *antisymétrique* (resp. *alternée*) si $\sigma \cdot f = \varepsilon(\sigma) f$, où $\varepsilon\colon \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$ est la signature (resp. si f s'annule sur tout n-uple dont deux vecteurs sont égaux). L'ensemble $\mathscr{A}_n(E)$ des formes n-linéaires alternée est un sous-K-espace vectoriel de $\mathscr{L}_n(E)$.
(1) Montrer que si $f \in \mathscr{L}_n(E)$ est alternée, alors elle est antisymétrique. La réciproque est-elle vraie ?
(2) Soit $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On note $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ la base duale (caractérisée par $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i$ pour tout $x \in E$). Montrer que $f = f(e_1, \ldots, e_n) \det_{\mathfrak{B}}$ pour tout $f \in \mathscr{A}_n(E)$, où $\det_{\mathfrak{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{i=1}^{n} \varphi_{\sigma(i)}(x_i)$.
(3) En déduire que $\mathscr{A}_n(E)$ est une droite vectorielle.
(4) Montrer que $x_1, \ldots, x_n \in E$ forment une base si et seulement si $\det_{\mathfrak{B}}(x_1, \ldots, x_n) \in K^\times$.
(5) Soit $u \in \mathsf{End}_K(E)$. Montrer qu'il existe $\det(u) \in K$ tel que pour tout $f \in \mathscr{A}_n(E)$, on ait

$$f(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det(u) f(x_1, \ldots, x_n)$$

pour tout $x_1, \ldots, x_n \in E$.
(6) Montrer que si $v \in \mathsf{End}_K(V)$, on a $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$, et $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$ pour tout $\lambda \in K$.
(7) Montrer que $u \in \mathsf{GL}(E) \Leftrightarrow \det(u) \in K^\times$.

Exercice 13. Soient E un K-espace vectoriel de dimension n, $f, g \in \mathsf{End}_K(E)$ et $\mathfrak{B}$ une base de E. Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} \det_{\mathfrak{B}}(x_1, \ldots, x_{i-1}, f(x_i), x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, g(x_j), x_{j+1}, \ldots, x_n) = \lambda \det{}_{\mathfrak{B}}(x_1, \ldots, x_n)$$

pour tout $x_1, \ldots, x_n \in E$.

Exercice 14. Soient K un corps, $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathsf{M}_n(K)$.
(1) Montrer que $\det(A) = \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$.
(2) Montrer que $\det({}^tA) = \det(A)$.
(3) (Développement d'un déterminant selon une rangée). On note $A_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne. Montrer que

$$\begin{cases} \det(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}) & \text{(développement par rapport à la } j\text{-ème colonne)} \\ \det(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}) & \text{(développement par rapport à la } i\text{-ème ligne)} \end{cases}.$$

Les scalaires $\det(A_{i,j})$ (resp. $(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$) s'appellent *mineur* (resp. *cofacteur*) relatif à $a_{i,j}$.

(4) La *comatrice* de A est $\mathsf{com}(A) = \big((-1)^{i+j}\det(A_{i,j})\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (c'est la matrice des cofacteurs). Montrer que $A^t\mathsf{com}(A) = {}^t\mathsf{com}(A)A = \det(A)\,\mathrm{I}_n$.
(5) (Formules de Cramer). Soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}, Y \in K^n$ des vecteurs colonne. Pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, notons A_j la matrice A dans laquelle la j-ème colonne a été remplacée par Y. Montrer que si $AX = Y$, on a $\det(A)x_i = \det(A_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Exercice 15. Soient K un corps et $a_1, \ldots, a_n \in K$. Montrer que

$$\mathsf{V}(a_1, \ldots, a_n) := \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i).$$

Interprétation en termes d'interpolation de Lagrange ?

Exercice 16. Soient K un corps, $A, B \in \mathsf{M}_n(K)$ et $M = \left(\begin{smallmatrix} B & A \\ A & A \end{smallmatrix}\right) \in \mathsf{M}_{2n}(K)$. Déterminer le rang de M en fonction de A et B. Calculer son inverse lorsque M est inversible.

Exercice 17. Soient $A \in \mathsf{M}_{3,2}(K)$, $B \in \mathsf{M}_{2,2}(K)$ et $C \in \mathsf{M}_{2,3}(K)$ avec $ABC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver x.

Exercice 18. Soient $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ à coefficients dans $\{\pm 1\}$. Montrer que $\det(A) \in 2^{n-1}\,\mathbf{Z}$

Exercice 19. (Déterminant circulant). Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbf{C}$ et $\zeta = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right) \in \mathbf{C}$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \cdots & \alpha_{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_0 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta & \cdots & \zeta^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \zeta^{n-1} & \ldots & \zeta^{(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Calculer M^2, $\det(M^2)$, AM et MAM. En déduire $\det(A)$.

Exercice 20. (Déterminant de Cauchy). Soient K un corps, $n \in \mathbf{N}_{>0}$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ et $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in K^n$. Calculer $\det(C_{\mathbf{a},\mathbf{b}})$ où $C_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Exercice 21. Soit K un corps. Déterminer les matrices $A \in \mathsf{M}_n(K)$ vérifiant

$$(\forall M \in \mathsf{M}_n(K))\ \det(A + M) = \det(A) + \det(M).$$

En déduire que si $A, B \in \mathsf{M}_n(K)$ sont telles que $(\forall M \in \mathsf{M}_n(K))\ \det(A+M) = \det(B+M)$, alors $A = B$.

Exercice 22. Soient $n, m \in \mathbf{N}_{>0}$ et K un corps. Si $A \in \mathsf{M}_{n,m}(K)$ et $B \in \mathsf{M}_{m,n}(K)$, montrer que $(-X)^m\chi_{AB}(X) = (-X)^n\chi_{BA}(X)$.

Exercice 23. Soient K un corps et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathsf{M}_n(K)$. Si $I \subset \{1, \ldots, n\}$, on note A_I la matrice extraite $(a_{i,j})_{i,j\in I}$. Montrer que $\det(A + t\,\mathrm{I}_n) = \sum\limits_{k=0}^{n}\Big(\sum\limits_{\#I=n-k}\det(A_I)\Big)t^k$ (en particulier, les quantités $\sum\limits_{\#I=k}\det(A_I)$ sont invariantes par conjugaison).

Exercice 24. Soient $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbf{R})$ semblables dans $\mathsf{M}_n(\mathbf{C})$ (*i.e.* telles qu'il existe $P \in \mathsf{GL}_n(\mathbf{C})$ avec $P^{-1}AP = B$). Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathsf{M}_n(\mathbf{R})$. Plus généralement, si K est un corps infini, L une extension finie de K, et $A, B \in \mathsf{M}_n(K)$ sont semblables dans $\mathsf{M}_n(L)$, alors A et B sont semblables dans $\mathsf{M}_n(K)$.

Exercice 25. Soient K un corps, E un K-espace vectoriel de dimension finie et $g \in \mathsf{GL}(E)$. On considère l'endomorphisme φ de $\mathsf{End}_K(E)$ donné par $\varphi(f) = g \circ f \circ g^{-1}$. Calculer $\det(\varphi)$ et $\mathsf{Tr}(\varphi)$.

Exercice 26. Soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et $b_1 < \cdots < b_n$ des réels. Montrer que tous les mineurs de la matrice $(e^{a_i b_j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ sont strictement positifs