Université de Bordeaux

Master Agrégation
Révisions sur la réduction des endomorphismes

Dans tout ce qui suit, K désigne un corps commutatif, V un K-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de V. On note χ_f (resp. μ_f) son polynôme caractéristique (resp. minimal).

Exercice 1. Supposons χ_f scindé dans $K[X]$.
(1) Montrer que f est trigonalisable.
(2) Supposons que $K = \mathbf{R}$ et que V est un espace euclidien. Montrer que f est trigonalisable dans une base orthonormée de V.

Exercice 2. (1) Soient $\lambda \in K$ et $g \in \mathsf{End}_K(V)$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathsf{Ker}(f - \lambda\, \mathsf{Id}_V)$ est stable par g.
(2) Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes trigonalisables (resp. diagonalisables) de V qui commutent deux à deux. Montrer qu'ils sont trigonalisanles (resp. diagonalisables) dans une même base de V.

Exercice 3. (Cayley-Hamilton) (1) Si $v \in V \backslash \{0\}$, notons $\varphi_v \colon K[X] \to V$ l'application définie par $\varphi_v(P) = P(f)(v)$: elle est K-linéaire. Justifier l'existence et l'unicité d'un polynôme unitaire P_v tel que $\mathsf{Ker}(\varphi_v) = (P_v)$. Montrer que $\mathfrak{B}_v = (v, f(v), f^2(v), \dots, f^{d_v - 1}(v))$ est une base de $\mathsf{Im}(\varphi_v)$ sur K, où $d_v = \deg(P_v)$.
(2) Le sous-espace $\mathsf{Im}(\varphi_v)$ est stable par f : quelle est la matrice de l'endomorphisme de $\mathsf{Im}(\varphi_v)$ dans la base $\mathfrak{B}_v$? En déduire que $P_v \mid \chi_f$, puis que $\chi_f(f) = 0$.

Exercice 4. (Lemme des noyaux) (1) Soient $P, Q \in K[X]$ premiers entre eux tels que $(PQ)(f) = 0$. Montrer que $V = \mathsf{Ker}(P(f)) \oplus \mathsf{Ker}(Q(f))$, et que le projecteur sur $\mathsf{Ker}(P(f))$ parallèlement à $\mathsf{Ker}(Q(f))$ est un polynôme en f.
(2) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples dans $K[X]$.

Exercice 5. Supposons K fini de cardinal q. Prouver que f est diagonalisable si et seulement si $f^q = f$.

Exercice 6. (1) Vérifier que si f est nilpotent, alors $\mathsf{Id}_V - f$ est inversible.
(2) Supposons K de caractéristique $p > 0$. Démontrer que f est nilpotent si et seulement si $\mathsf{Id}_V - f$ est d'ordre fini dans $\mathsf{GL}(V)$ et son ordre est une puissance de p.

Exercice 7. (Décomposition de Dunford) Supposons χ_f scindé dans $K[X]$: écrivons $\chi_f = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ deux à deux distincts et $m_1, \dots, m_r \in \mathbf{N}_{>0}$. Pour $k \in \{1, \dots, r\}$, posons $V_k = \mathsf{Ker}\left(f - \lambda_k\, \mathsf{Id}_V)^{m_k}\right)$ (c'est le *sous-espace caractéristique* de f associé à la valeur propre λ_k).
(1) Montrer que $V = \bigoplus_{k=1}^{r} V_k$.

(2) Notons δ l'unique endomorphisme de V induisant $\lambda_k \,\mathsf{Id}_{V_k}$ sur V_k. Montrer que $\delta \in K[f]$, que $\nu = f - \delta$ est nilpotent et que $\delta \circ \nu = \nu \circ \delta$.
(3) Montrer qu'il existe un unique couple (δ_f, ν_f) d'endomorphismes de V tels que δ_f soit diagonalisable, ν_f nilpotent, $f = \delta_f + \nu_f$ et $\delta_f \circ \nu_f = \nu_f \circ \delta_f$ (c'est la *décomposition de Dunford* de f).
(4) Quelle est la décomposition de Dunford de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{smallmatrix}\right) \in \mathsf{M}_3(\mathbf{C})$?

On suppose désormais K de caractéristique nulle. Le but de ce qui suit est de donner un algorithme permettant de la calculer la décomposition de Dunford sans avoir à connaître les valeurs propres de f.
(5) Posons $P = \frac{\chi_f}{\mathsf{pgcd}(\chi_f, \chi'_f)}$. Prouver que P et P' sont premiers entre eux dans $K[X]$. En déduire que $P'(f) \in \mathsf{GL}(V)$.
(6) Posons $g = f - P(f) \circ P'(f)^{-1}$. Montrer que la décomposition de Dunford de g vérifie $\delta_g = \delta_f$ et $\nu_g \in \nu_f^2 K[f]$.
(7) (Dunford algorithmique) En déduire que l'on peut construire inductivement une suite d'endomorphismes $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de V en posant $f_0 = f$ et $f_{k+1} = f_k - P(f_k) \circ P'(f_k)^{-1}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, puis qu'il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $f_k = \delta_f$ pour tout $k \geqslant m$.

Exercice 8. (Surjectivité de l'application $\exp\colon \mathsf{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathsf{GL}_n(\mathbf{C})$)
(1) Prouver que toute matrice diagonalisable $D \in \mathsf{GL}_n(\mathbf{C})$ peut s'écrire comme l'exponentielle d'un élément de $\mathbf{C}[D]$.
(2) Trouver $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que si $N \in \mathsf{M}_n(\mathbf{C})$ est nilpotente, alors $\mathrm{I}_n + N = \exp(P(N))$.
(3) Conclure.
(4) L'application $\exp\colon \mathsf{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathsf{GL}_n(\mathbf{R})$ est-elle surjective ?

Exercice 9. Soit $n \in \mathbf{N}_{>0}$.
(1) Montrer que l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathsf{M}_n(\mathbf{C})$ est l'ensemble des matrices dont le polynôme caractéristique est à racines simples (on pourra utiliser le discriminant d'un polynôme).
(2) Prouver que $M \in \mathsf{M}_n(\mathbf{C})$ est diagonalisable si et seulement si $\exp(M)$ est diagonalisable (on pourra utiliser la décomposition de Dunford). Quelles sont les matrices $M \in \mathsf{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $\exp(M) = \mathrm{I}_n$?
(3) Soit $H \in \mathsf{M}_n(\mathbf{C})$ hermitienne définie positive. Démontrer qu'il existe une unique matrice hermitienne H' telle que $H = \exp(H')$.

Exercice 10. (disques de Gerschgorin) Soient $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathsf{M}_n(\mathbf{C})$.
(1) Soit $\lambda \in \mathsf{Sp}(M)$. Prouver qu'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|\lambda - m_{i,i}| \leqslant \sum_{j \neq i} |m_{i,j}|$.
(2) On suppose que $d_i := |m_{i,i}| - \sum_{j \neq i} |m_{i,j}| > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Démontrer que $|\det(M)| \geqslant d_1 \cdots d_n$ (on pourra considérer la matrice $(m_{i,j}/d_i)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$).
(3) Soient $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbf{C}[X]$ et $z \in \mathbf{C}$ une racine de P. Montrer que $|z + a_{n-1}| \leqslant 1$ ou $|z| \leqslant \max(|a_0|, |a_1| + 1, \ldots, |a_{n-2}| + 1)$.

Exercice 11. Supposons K de caractéristique différente de 2.
(1) Soit G un sous-groupe de $\mathsf{GL}(V)$ formé d'involutions. Prouver que G est fini d'ordre divisant $2^{\dim(V)}$.
(2) Soient n et m deux entiers naturels. En déduire que les groupes $\mathsf{GL}_n(K)$ et $\mathsf{GL}_m(K)$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$.

Exercice 12. (1) Démontrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace de V admet un supplémentaire stable par f.
(2) Supposons χ_f scindé dans $K[X]$. Démontrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace de V stable par f admet un supplémentaire stable par f.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbf{N}_{>0}$.
(1) Prouver que l'ensemble T_n des matrices trigonalisables est un fermé de $\mathsf{M}_n(\mathbf{R})$.
(2) Démontrer que toute matrice $M \in T_n$ est limite d'une suite de matrices de $\mathsf{M}_n(\mathbf{R})$ dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.
(3) En déduire l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathsf{M}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 14. (Burnside) On suppose K de caractéristique 0. Soient $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et G un sous-groupe de $\mathsf{GL}_n(K)$. On suppose G d'exposant fini, c'est-à-dire qu'il existe $r \in \mathbf{N}_{>0}$ tel que $M^r = \mathrm{I}_n$ pour tout $M \in G$. Le but de cet exercice est de montrer que G est fini.
(1) Prouver que $M \in \mathsf{M}_n(K)$ est nilpotente si et seulement si $\mathsf{Tr}(M^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}_{>0}$ [indication : utiliser un déterminant de Vandermonde].
(2) Justifier l'existence d'une base $(M_1, \ldots, M_d)$ du sous-espace $\mathsf{Vect}(G) \subset \mathsf{M}_n(K)$ formée d'éléments de G.
(3) Soient $\varphi\colon G \to K^d$ l'application donnée par $\varphi(M) = (\mathsf{Tr}(MM_k))_{1 \leqslant k \leqslant d}$, et $M, N \in G$ tels que $\varphi(M) = \varphi(N)$. Montrer que $\mathsf{Tr}((M-N)A) = 0$ pour tout $A \in \mathsf{Vect}(G)$. En déduire à l'aide de la question (1) que la matrice $MN^{-1} - \mathrm{I}_n$ est nilpotente.
(4) Montrer que $MN^{-1} - \mathrm{I}_n$ est diagonalisable sur une extension de K, puis que $M = N$.
(5) Prouver que $\varphi(G)$ est fini et conclure.
(6) Qu'en est-il si K est de caractéristique $p > 0$?

Exercice 15. Supposons K fini de caractéristique p. Désignons par U le sous-groupe de $\mathsf{GL}_n(K)$ des matrices triangulaires supérieures n'ayant que des 1 sur la diagonale. Prouver que U est un p-Sylow de $\mathsf{GL}_n(K)$.

Exercice 16. (Minkowski) Soient $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et p un nombre premier impair.
(1) Soit $r \in \mathbf{N}_{>0}$. Supposons que $N \in \mathsf{M}_n(\mathbf{Z})$ vérifie $(\mathrm{I}_n + pN)^r = \mathrm{I}_n$. Montrer que $\lim_{k\to\infty} N^k = 0$ dans $\mathsf{M}_n(\mathbf{C})$, puis que N est nilpotente. En déduire que $N = 0$.
(2) Soit G un sous-groupe fini de $\mathsf{GL}_n(\mathbf{Z})$. Prouver que la réduction modulo p des coefficients induit un morphisme injectif de groupes $G \to \mathsf{GL}_n(\mathbf{F}_p)$. En conclure que G est d'ordre $\leqslant 3^{n^2}$.
(3) Soit G un sous-groupe infini de $\mathsf{GL}_n(\mathbf{Z})$. Démontrer que G contient un élément d'ordre infini. Est-ce encore vrai si G est un groupe infini quelconque ?

Exercice 17. Supposons $K = \mathbf{C}$ et V muni d'une norme $\|.\|$. On note $|||.|||$ la norme induite sur $\mathsf{End}(V)$.
(1) Supposons f nilpotent. Montrer que si $\{(\mathsf{Id}_V + f)^k\}_{k \in \mathbf{N}}$ est borné, alors $f = 0$.
(2) Soit $g \in \mathsf{GL}(V)$. Prouver que le sous-groupe $\langle g \rangle$ est borné si et seulement si g est diagonalisable avec des valeurs propres de module 1 [indication : Dunford].
(3) Soit G un sous-groupe de $\mathsf{GL}(V)$ tel que $|||g - \mathsf{Id}_V||| < \sqrt{3}$ pour tout $g \in G$. Si λ est une valeur propre d'un élément g de G, démontrer que pour tout $k \in \mathbf{Z}$, le nombre complexe λ^k est de module 1 et de partie réelle $> -\frac{1}{2}$. En déduire que $\lambda = 1$, puis que $G = \{\mathsf{Id}_V\}$.

Exercice 18. (décomposition polaire) Soit $n \in \mathbf{N}_{>0}$.
(1) Soit $\Sigma \in \mathsf{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique positive. Prouver qu'il existe une unique matrice symétrique positive S telle que $\Sigma = S^2$.
(2) En déduire que toute matrice $M \in \mathsf{GL}_n(\mathbf{R})$ s'écrit de façon unique $M = OS$, où O est orthogonale et S est symétrique définie positive.

Exercice 19. (Décomposition de Frobenius) (1) Soit $x \in V$. Justifier l'existence de $P_{f,x} \in K[X]$ unitaire tel que pour tout $P \in K[X]$, on ait $P(f)(x) = 0 \Leftrightarrow P_{f,x} \mid P$, et que $\mu_f = \operatorname{ppcm}_{x \in V} P_{f,x}$.
(2) Montrer qu'il existe $v \in V$ tel que $P_{f,v} = \mu_f$.

On dit que f est *cyclique* s'il existe $v \in V$ tel que $(v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ soit une K-base de V.

(3) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
  (i) f est cyclique ;
  (ii) $\chi_f = \mu_f$.

(4) Soit $v \in V$ tel que $P_{f,v} = \mu_f$ (*cf* question (2)) et $W = \mathsf{Vect}(v, f(v), \ldots, f^{d-1}(v))$, où $d = \deg(\mu_f)$. C'est un sous-espace de V stable par f.
  (a) Justifier l'existence d'une forme linéaire $\alpha\colon V \to K$ telle que $\alpha(f^{d-1}(v)) = 1$ et $\alpha(f^k(v)) = 0$ si $0 \leqslant k < d-1$.
  (b) Posons $U = \{x \in V\,;\, (\forall k \in \mathbf{N})\, \alpha(f^k(x)) = 0\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathsf{Ker}(\alpha \circ f^k) \subset V$. C'est un sous-espace stable par f. Montrer que $W \cap U = \{0\}$.
  (c) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon K[f] &\to V^{\vee} = \mathsf{Hom}_K(V, K) \\ g &\mapsto \alpha \circ g \end{aligned}$$

  est injective.
  (d) Calculer $\dim_K(U)$ en raisonnant par dualité, et montrer que U est un supplémentaire de W dans V.

(5) Déduire de ce qui précède qu'il existe une décomposition $V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i$ où chaque V_i est stable par f, chaque $f_i := f_{i|V_i}$ est cyclique, et $\langle \mu_{f_1} \rangle \subset \cdots \subset \langle \mu_{f_m} \rangle$ dans $K[X]$.