

## Master Agrégation

### Révisions sur la réduction des endomorphismes

---

Dans tout ce qui suit,  $K$  désigne un corps commutatif,  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f$  un endomorphisme de  $V$ . On note  $\chi_f$  (resp.  $\mu_f$ ) son polynôme caractéristique (resp. minimal).

**Exercice 1.** Supposons  $\chi_f$  scindé dans  $K[X]$ .

(1) Montrer que  $f$  est trigonalisable.

(2) Supposons que  $K = \mathbf{R}$  et que  $V$  est un espace euclidien. Montrer que  $f$  est trigonalisable dans une base orthonormée de  $V$ .

**Exercice 2.** (1) Soient  $\lambda \in K$  et  $g \in \text{End}_K(V)$  tel que  $f \circ g = g \circ f$ . Montrer que  $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_V)$  est stable par  $g$ .

(2) Soit  $(f_i)_{i \in I}$  une famille d'endomorphismes trigonalisables (resp. diagonalisables) de  $V$  qui commutent deux à deux. Montrer qu'ils sont trigonalisables (resp. diagonalisables) dans une même base de  $V$ .

**Exercice 3.** (CAYLEY-HAMILTON) (1) Si  $v \in V \setminus \{0\}$ , notons  $\varphi_v : K[X] \rightarrow V$  l'application définie par  $\varphi_v(P) = P(f)(v)$  : elle est  $K$ -linéaire. Justifier l'existence et l'unicité d'un polynôme unitaire  $P_v$  tel que  $\text{Ker}(\varphi_v) = (P_v)$ . Montrer que  $\mathfrak{B}_v = (v, f(v), f^2(v), \dots, f^{d_v-1}(v))$  est une base de  $\text{Im}(\varphi_v)$  sur  $K$ , où  $d_v = \deg(P_v)$ .

(2) Le sous-espace  $\text{Im}(\varphi_v)$  est stable par  $f$  : quelle est la matrice de l'endomorphisme de  $\text{Im}(\varphi_v)$  dans la base  $\mathfrak{B}_v$ ? En déduire que  $P_v \mid \chi_f$ , puis que  $\chi_f(f) = 0$ .

**Exercice 4.** (LEMME DES NOYAUX) (1) Soient  $P, Q \in K[X]$  premiers entre eux tels que  $(PQ)(f) = 0$ . Montrer que  $V = \text{Ker}(P(f)) \oplus \text{Ker}(Q(f))$ , et que le projecteur sur  $\text{Ker}(P(f))$  parallèlement à  $\text{Ker}(Q(f))$  est un polynôme en  $f$ .

(2) Montrer que  $f$  est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples dans  $K[X]$ .

**Exercice 5.** Supposons  $K$  fini de cardinal  $q$ . Prouver que  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $f^q = f$ .

**Exercice 6.** (1) Vérifier que si  $f$  est nilpotent, alors  $\text{Id}_V - f$  est inversible.

(2) Supposons  $K$  de caractéristique  $p > 0$ . Démontrer que  $f$  est nilpotent si et seulement si  $\text{Id}_V - f$  est d'ordre fini dans  $\text{GL}(V)$  et son ordre est une puissance de  $p$ .

**Exercice 7.** (DÉCOMPOSITION DE DUNFORD) Supposons  $\chi_f$  scindé dans  $K[X]$  : écrivons

$\chi_f = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m_k}$  avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$  deux à deux distincts et  $m_1, \dots, m_r \in \mathbf{N}_{>0}$ .

Pour  $k \in \{1, \dots, r\}$ , posons  $V_k = \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id}_V)^{m_k}$  (c'est le *sous-espace caractéristique* de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda_k$ ).

(1) Montrer que  $V = \bigoplus_{k=1}^r V_k$ .

(2) Notons  $\delta$  l'unique endomorphisme de  $V$  induisant  $\lambda_k \text{Id}_{V_k}$  sur  $V_k$ . Montrer que  $\delta \in K[f]$ , que  $\nu = f - \delta$  est nilpotent et que  $\delta \circ \nu = \nu \circ \delta$ .

(3) Montrer qu'il existe un unique couple  $(\delta_f, \nu_f)$  d'endomorphismes de  $V$  tels que  $\delta_f$  soit diagonalisable,  $\nu_f$  nilpotent,  $f = \delta_f + \nu_f$  et  $\delta_f \circ \nu_f = \nu_f \circ \delta_f$  (c'est la *décomposition de Dunford* de  $f$ ).

(4) Quelle est la décomposition de Dunford de  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \text{M}_3(\mathbf{C})$  ?

On suppose désormais  $K$  de caractéristique nulle. Le but de ce qui suit est de donner un algorithme permettant de la calculer la décomposition de Dunford sans avoir à connaître les valeurs propres de  $f$ .

(5) Posons  $P = \frac{Xf}{\text{pgcd}(X_f, X'_f)}$ . Prouver que  $P$  et  $P'$  sont premiers entre eux dans  $K[X]$ . En déduire que  $P'(f) \in \text{GL}(V)$ .

(6) Posons  $g = f - P(f) \circ P'(f)^{-1}$ . Montrer que la décomposition de Dunford de  $g$  vérifie  $\delta_g = \delta_f$  et  $\nu_g \in \nu_f^2 K[f]$ .

(7) (DUNFORD ALGORITHMIQUE) En déduire que l'on peut construire inductivement une suite d'endomorphismes  $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$  de  $V$  en posant  $f_0 = f$  et  $f_{k+1} = f_k - P(f_k) \circ P'(f_k)^{-1}$  pour tout  $k \in \mathbf{N}$ , puis qu'il existe  $m \in \mathbf{N}$  tel que  $f_k = \delta_f$  pour tout  $k \geq m$ .

**Exercice 8.** (SURJECTIVITÉ DE L'APPLICATION  $\exp: \text{M}_n(\mathbf{C}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbf{C})$ )

(1) Prouver que toute matrice diagonalisable  $D \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$  peut s'écrire comme l'exponentielle d'un élément de  $\mathbf{C}[D]$ .

(2) Trouver  $P \in \mathbf{C}[X]$  tel que si  $N \in \text{M}_n(\mathbf{C})$  est nilpotente, alors  $\text{I}_n + N = \exp(P(N))$ .

(3) Conclure.

(4) L'application  $\exp: \text{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbf{R})$  est-elle surjective ?

**Exercice 9.** Soit  $n \in \mathbf{N}_{>0}$ .

(1) Montrer que l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables de  $\text{M}_n(\mathbf{C})$  est l'ensemble des matrices dont le polynôme caractéristique est à racines simples (on pourra utiliser le discriminant d'un polynôme).

(2) Prouver que  $M \in \text{M}_n(\mathbf{C})$  est diagonalisable si et seulement si  $\exp(M)$  est diagonalisable (on pourra utiliser la décomposition de Dunford). Quelles sont les matrices  $M \in \text{M}_n(\mathbf{C})$  telles que  $\exp(M) = \text{I}_n$  ?

(3) Soit  $H \in \text{M}_n(\mathbf{C})$  hermitienne définie positive. Démontrer qu'il existe une unique matrice hermitienne  $H'$  telle que  $H = \exp(H')$ .

**Exercice 10.** (DISQUES DE GERSCHGORIN) Soient  $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$  et  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \text{M}_n(\mathbf{C})$ .

(1) Soit  $\lambda \in \text{Sp}(M)$ . Prouver qu'il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $|\lambda - m_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |m_{i,j}|$ .

(2) On suppose que  $d_i := |m_{i,i}| - \sum_{j \neq i} |m_{i,j}| > 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Démontrer que

$|\det(M)| \geq d_1 \cdots d_n$  (on pourra considérer la matrice  $(m_{i,j}/d_i)_{1 \leq i,j \leq n}$ ).

(3) Soient  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbf{C}[X]$  et  $z \in \mathbf{C}$  une racine de  $P$ . Montrer que  $|z + a_{n-1}| \leq 1$  ou  $|z| \leq \max(|a_0|, |a_1| + 1, \dots, |a_{n-2}| + 1)$ .

**Exercice 11.** Supposons  $K$  de caractéristique différente de 2.

(1) Soit  $G$  un sous-groupe de  $\text{GL}(V)$  formé d'involutions. Prouver que  $G$  est fini d'ordre divisant  $2^{\dim(V)}$ .

(2) Soient  $n$  et  $m$  deux entiers naturels. En déduire que les groupes  $\text{GL}_n(K)$  et  $\text{GL}_m(K)$  sont isomorphes si et seulement si  $n = m$ .

**Exercice 12.** (1) Démontrer que  $f$  est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace de  $V$  admet un supplémentaire stable par  $f$ .

(2) Supposons  $\chi_f$  scindé dans  $K[X]$ . Démontrer que  $f$  est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace de  $V$  stable par  $f$  admet un supplémentaire stable par  $f$ .

**Exercice 13.** Soit  $n \in \mathbf{N}_{>0}$ .

(1) Prouver que l'ensemble  $T_n$  des matrices trigonalisables est un fermé de  $M_n(\mathbf{R})$ .

(2) Démontrer que toute matrice  $M \in T_n$  est limite d'une suite de matrices de  $M_n(\mathbf{R})$  dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

(3) En déduire l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables de  $M_n(\mathbf{R})$ .

**Exercice 14.** (BURNSIDE) On suppose  $K$  de caractéristique 0. Soient  $n \in \mathbf{N}_{>0}$  et  $G$  un sous-groupe de  $\mathrm{GL}_n(K)$ . On suppose  $G$  d'exposant fini, c'est-à-dire qu'il existe  $r \in \mathbf{N}_{>0}$  tel que  $M^r = I_n$  pour tout  $M \in G$ . Le but de cet exercice est de montrer que  $G$  est fini.

(1) Prouver que  $M \in M_n(K)$  est nilpotente si et seulement si  $\mathrm{Tr}(M^k) = 0$  pour tout  $k \in \mathbf{N}_{>0}$  [indication : utiliser un déterminant de Vandermonde].

(2) Justifier l'existence d'une base  $(M_1, \dots, M_d)$  du sous-espace  $\mathrm{Vect}(G) \subset M_n(K)$  formée d'éléments de  $G$ .

(3) Soient  $\varphi: G \rightarrow K^d$  l'application donnée par  $\varphi(M) = (\mathrm{Tr}(MM_k))_{1 \leq k \leq d}$ , et  $M, N \in G$  tels que  $\varphi(M) = \varphi(N)$ . Montrer que  $\mathrm{Tr}((M - N)A) = 0$  pour tout  $A \in \mathrm{Vect}(G)$ . En déduire à l'aide de la question (1) que la matrice  $MN^{-1} - I_n$  est nilpotente.

(4) Montrer que  $MN^{-1} - I_n$  est diagonalisable sur une extension de  $K$ , puis que  $M = N$ .

(5) Prouver que  $\varphi(G)$  est fini et conclure.

(6) Qu'en est-il si  $K$  est de caractéristique  $p > 0$  ?

**Exercice 15.** Supposons  $K$  fini de caractéristique  $p$ . Désignons par  $U$  le sous-groupe de  $\mathrm{GL}_n(K)$  des matrices triangulaires supérieures n'ayant que des 1 sur la diagonale. Prouver que  $U$  est un  $p$ -Sylow de  $\mathrm{GL}_n(K)$ .

**Exercice 16.** (MINKOWSKI) Soient  $n \in \mathbf{N}_{>0}$  et  $p$  un nombre premier impair.

(1) Soit  $r \in \mathbf{N}_{>0}$ . Supposons que  $N \in M_n(\mathbf{Z})$  vérifie  $(I_n + pN)^r = I_n$ . Montrer que  $\lim_{k \rightarrow \infty} N^k = 0$  dans  $M_n(\mathbf{C})$ , puis que  $N$  est nilpotente. En déduire que  $N = 0$ .

(2) Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ . Prouver que la réduction modulo  $p$  des coefficients induit un morphisme injectif de groupes  $G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$ . En conclure que  $G$  est d'ordre  $\leq 3^{n^2}$ .

(3) Soit  $G$  un sous-groupe infini de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ . Démontrer que  $G$  contient un élément d'ordre infini. Est-ce encore vrai si  $G$  est un groupe infini quelconque ?

**Exercice 17.** Supposons  $K = \mathbf{C}$  et  $V$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$ . On note  $\|\cdot\|$  la norme induite sur  $\mathrm{End}(V)$ .

(1) Supposons  $f$  nilpotent. Montrer que si  $\{(\mathrm{Id}_V + f)^k\}_{k \in \mathbf{N}}$  est borné, alors  $f = 0$ .

(2) Soit  $g \in \mathrm{GL}(V)$ . Prouver que le sous-groupe  $\langle g \rangle$  est borné si et seulement si  $g$  est diagonalisable avec des valeurs propres de module 1 [indication : Dunford].

(3) Soit  $G$  un sous-groupe de  $\mathrm{GL}(V)$  tel que  $\|g - \mathrm{Id}_V\| < \sqrt{3}$  pour tout  $g \in G$ . Si  $\lambda$  est une valeur propre d'un élément  $g$  de  $G$ , démontrer que pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ , le nombre complexe  $\lambda^k$  est de module 1 et de partie réelle  $> -\frac{1}{2}$ . En déduire que  $\lambda = 1$ , puis que  $G = \{\mathrm{Id}_V\}$ .

**Exercice 18.** (DÉCOMPOSITION POLAIRE) Soit  $n \in \mathbf{N}_{>0}$ .

(1) Soit  $\Sigma \in M_n(\mathbf{R})$  une matrice symétrique positive. Prouver qu'il existe une unique matrice symétrique positive  $S$  telle que  $\Sigma = S^2$ .

(2) En déduire que toute matrice  $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$  s'écrit de façon unique  $M = OS$ , où  $O$  est orthogonale et  $S$  est symétrique définie positive.

**Exercice 19.** (DÉCOMPOSITION DE FROBENIUS) (1) Soit  $x \in V$ . Justifier l'existence de  $P_{f,x} \in K[X]$  unitaire tel que pour tout  $P \in K[X]$ , on ait  $P(f)(x) = 0 \Leftrightarrow P_{f,x} \mid P$ , et que  $\mu_f = \text{ppcm}_{x \in V} P_{f,x}$ .

(2) Montrer qu'il existe  $v \in V$  tel que  $P_{f,v} = \mu_f$ .

On dit que  $f$  est *cyclique* s'il existe  $v \in V$  tel que  $(v, f(v), f^2(v), \dots, f^{n-1}(v))$  soit une  $K$ -base de  $V$ .

(3) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i)  $f$  est cyclique ;

(ii)  $\chi_f = \mu_f$ .

(4) Soit  $v \in V$  tel que  $P_{f,v} = \mu_f$  (cf question (2)) et  $W = \text{Vect}(v, f(v), \dots, f^{d-1}(v))$ , où  $d = \deg(\mu_f)$ . C'est un sous-espace de  $V$  stable par  $f$ .

(a) Justifier l'existence d'une forme linéaire  $\alpha: V \rightarrow K$  telle que  $\alpha(f^{d-1}(v)) = 1$  et  $\alpha(f^k(v)) = 0$  si  $0 \leq k < d-1$ .

(b) Posons  $U = \{x \in V; (\forall k \in \mathbf{N}) \alpha(f^k(x)) = 0\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \text{Ker}(\alpha \circ f^k) \subset V$ . C'est un sous-espace stable par  $f$ . Montrer que  $W \cap U = \{0\}$ .

(c) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi: K[f] &\rightarrow V^\vee = \text{Hom}_K(V, K) \\ g &\mapsto \alpha \circ g \end{aligned}$$

est injective.

(d) Calculer  $\dim_K(U)$  en raisonnant par dualité, et montrer que  $U$  est un supplémentaire de  $W$  dans  $V$ .

(5) Dédurre de ce qui précède qu'il existe une décomposition  $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$  où chaque  $V_i$  est stable par  $f$ , chaque  $f_i := f_i|_{V_i}$  est cyclique, et  $\langle \mu_{f_1} \rangle \subset \dots \subset \langle \mu_{f_m} \rangle$  dans  $K[X]$ .