
Corrigé du Devoir maison n°1

Exercice 1

Soient A un anneau unitaire, M un A -module noethérien et $f: M \rightarrow M$ une application A -linéaire.

(1) On suppose f surjective. Montrer que c'est un isomorphisme (indication : considérer la suite de sous-modules $K_n = \text{Ker}(f^n)$).

(2) Si f est supposée injective, est-ce automatiquement un isomorphisme ?

On suppose désormais que $M = A^n$ et on note $X = (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{M}_n(A)$ la matrice de f dans la base canonique.

(3) Montrer que f est surjective si et seulement si $\det(X) \in A^\times$ (indication : penser à la comatrice).

(4) Montrer que si $\det(X)$ n'est pas diviseur de zéro dans A , alors f est injective.

(5) Montrer que réciproquement, si $\det(X)$ est diviseur de zéro dans A , alors f n'est pas injective (indication : soient $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $a \det(X) = 0$ et $r < n$ le plus grand entier tel qu'il existe une matrice $N \in \mathbf{M}_r(A)$ extraite de M telle que $a \det(N) \neq 0$, construire $V \in A^n \setminus \{0\}$ tel que $XV = 0$ à partir d'une telle matrice N).

On suppose désormais que f est injective.

(6) Lorsque $A = \mathbf{Z}$, montrer que $\# \text{Coker}(f) = |\det(X)|$.

(7) Montrer qu'on a $\dim_K(\text{Coker}(f)) = \deg(\det(X))$ lorsque $A = K[X]$ (où K est un corps commutatif).

Solution : (1) La suite de sous-modules $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante : comme M est noethérien, elle est stationnaire. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $K_n = K_{n+1}$. Si $m \in \text{Ker}(f)$, il existe $m' \in M$ tel que $m = f^n(m')$ (parce que f donc f^n est surjective). On a

$$f^{n+1}(m') = f(m) = 0 \Rightarrow m' \in K_{n+1} = K_n \Rightarrow m = f^n(m') = 0,$$

ce qui prouve l'injectivité de f .

(2) C'est faux en général, comme le montre l'exemple de la multiplication par 2 sur $\mathbf{Z}$.

(3) Notons $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de A^n . Si f est surjective, il existe $m_i \in A^n$ tel que $f(m_i) = e_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$: notons $g: A^n \rightarrow A^n$ l'unique application A -linéaire telle que $g(e_i) = m_i$. On a $f \circ g = \text{Id}_{A^n}$, donc $\det(f) \det(g) = 1$, donc $\det(f) = \det(X) \in A^\times$. Réciproquement, supposons $\det(X) \in A^\times$. On a $X^t \text{com}(X) = \det(X) \text{Id}_n$ (où ${}^t \text{com}(X)$ est la transposée de la comatrice de X) : si $g: A^n \rightarrow A^n$ désigne l'application A -linéaire dont la matrice dans la base canonique est $(\det(X))^{-1} {}^t \text{com}(X)$, on a $f \circ g = \text{Id}_{A^n}$, ce qui implique que f est surjective.

(4) Soit $m \in \text{Ker}(f)$. Notons V le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de m dans la base canonique. On a $XV = 0$, donc $\det(X)V = {}^t \text{com}(X)XV = 0$: comme $\det(X)$ n'est pas diviseur de zéro, cela implique $V = 0$ i.e. $m = 0$, montrant l'injectivité de f .

(5) Lorsque $r = 0$, on a $aX = 0$: si $V = ae_1$, on a $V \in A^n \setminus \{0\}$ (car $a \neq 0$) et $XV = 0$, ce qui montre que f n'est pas injective dans ce cas. On suppose désormais $r > 0$. On a bien sûr $r < n$ vu que $a \det(X) = 0$. Écrivons $X = (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Quitte à multiplier X à gauche

et à droite par des matrices de permutation (cela ne change pas le caractère injectif ou non de f), on peut supposer la matrice $Y = (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r}$ extraite de X vérifie $a \det(Y) \neq 0$. Si $i \in \{1, \dots, n\}$, posons

$$Y_i = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,r} & x_{1,r+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{r,1} & \cdots & x_{r,r} & x_{r,r+1} \\ x_{i,1} & \cdots & x_{i,r} & x_{i,r+1} \end{pmatrix}$$

Si $i \in \{1, \dots, r\}$, la matrice Y_i a deux lignes égales, donc $\det(Y_i) = 0$. Si $i \in \{r+1, \dots, n\}$, la matrice Y_i est extraite de X , de taille $r+1$: on a $a \det(Y_i) = 0$ par définition de r . Dans tous les cas on a $a \det(Y_i) = 0$. En développant $\det(Y_i)$ par rapport à la dernière ligne, on a donc

$$a \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^j x_{i,j} \mu_j = 0$$

où μ_j est le déterminant du mineur de Y_i du coefficient d'indice $(r+1, j)$ (remarquons que ce mineur ne dépend pas de i). Ces égalités signifient que $XV = 0$ avec

$$V = a(-\mu_1, \mu_2, \dots, (-1)^{r+1} \mu_{r+1}, 0, \dots, 0) \in A^n \setminus \{0\}$$

(parce que $a\mu_{r+1} = a \det(Y) \neq 0$). Là encore, f n'est pas injective.

(6) La matrice X est équivalente à une matrice réduite : il existe $P, Q \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ telles que $P^{-1}XQ = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$ avec $a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_n$. On a bien alors $\det(X) = a_1 \cdots a_n$.

Comme P et Q sont inversibles, on a $\mathrm{Coker}(f) \simeq \bigoplus_{i=1}^n (\mathbf{Z}/a_i \mathbf{Z})$, ce qui implique qu'on a

$$\# \mathrm{Coker}(f) = |a_1 \cdots a_n| = |\det(X)|.$$

(7) Il existe $P, Q \in \mathrm{SL}_n(K[X])$ telles que $P^{-1}XQ = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$ avec $a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_n$. On a bien alors $\det(X) = a_1 \cdots a_n$. Comme les matrices P et Q sont inversibles, on a

$$\mathrm{Coker}(f) \simeq \bigoplus_{i=1}^n (K[X]/\langle a_i \rangle), \text{ et donc}$$

$$\dim_K(\mathrm{Coker}(f)) = \sum_{i=1}^n \dim_K(K[X]/\langle a_i \rangle) = \sum_{i=1}^n \deg(a_i) = \deg(a_1 \cdots a_n) = \deg(\det(X)).$$

Exercice 2

Soient $\lambda \in \mathbf{C}$ et $A := \mathbf{C}[X, Y]/\langle X^2 + Y^2 + \lambda \rangle$.

(1) Montrer que A est intègre si et seulement si $\lambda \neq 0$.

(2) Quand A est-il un corps ?

Solution : (1) Si $\lambda \neq 0$, écrivons $\lambda = -\mu^2$ avec $\mu \in \mathbf{C}^\times$: on a $X^2 + Y^2 + \lambda = X^2 + (Y - \mu)(Y + \mu)$. Comme $\mu \neq -\mu$, on a $\mathrm{pgcd}(Y - \mu, Y + \mu) = 1$, et le critère d'Eisenstein appliqué avec l'élément premier $Y - \mu$ dans $\mathbf{C}[Y][X]$ implique que $X^2 + Y^2 + \lambda$ est irréductible dans $\mathbf{C}[X, Y]$. Comme $\mathbf{C}[X, Y]$ est factoriel, cela montre que $X^2 + Y^2 + \lambda$ est premier dans $\mathbf{C}[X, Y]$, et donc que A est intègre.

Si $\lambda = 0$, on a $X^2 + Y^2 = (X + iY)(X - iY)$: comme $\mathrm{pgcd}(X + iY, X - iY) = 1$, le théorème des restes chinois implique que

$$A \simeq (\mathbf{C}[X, Y]/\langle X + iY \rangle) \times (\mathbf{C}[X, Y]/\langle X - iY \rangle) \simeq \mathbf{C}[X]^2$$

est réduit mais pas intègre.

(2) Soit $\mu \in \mathbf{C}$ tel que $\lambda = -\mu^2$: on a $X^2 + Y^2 + \lambda = X^2 + (Y - \mu)(Y + \mu) \in \mathfrak{m} := \langle X, Y - \mu \rangle$. L'idéal $\mathfrak{m} \subset \mathbf{C}[X, Y]$ est maximal, car $\mathbf{C}[X, Y]/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$ (via le morphisme qui envoie X sur 0 et Y sur μ). Pour des raisons de degré, on a $X \notin \mathfrak{p} := \langle X^2 + Y^2 + \lambda \rangle$: l'inclusion $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ est stricte, donc $\mathfrak{p}$ n'est pas maximal. En conclusion, l'anneau A n'est *jamaïs* un corps.