Université de Bordeaux **2025-2026**
Semestre 7 **Modules, Algèbre commutative**

Corrigé du Devoir maison n°1

Exercice 1

Soient A un anneau commutatif unitaire et X un ensemble. On note A^X le A-module des fonctions de X dans A, $A^{(X)}$ son sous-module des fonctions à support fini. Si Y est un sous-ensemble de X, on identifie $A^{(Y)}$ avec le sous-module des fonctions à support dans Y. Le but de l'exercice est de montrer que $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ n'est pas un $\mathbf{Z}$-module libre.

(1) Rappeler pourquoi $\mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ est un $\mathbf{Q}$-module libre.

(2) Prouver que $\mathbf{Z}^{(\mathbf{N})}$ est dénombrable et que $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ ne l'est pas.

(3) Soit I un ensemble et soit J un sous-ensemble de I. Montrer que $\mathbf{Z}^{(J)} / \mathbf{Z}^{(I)}$ est un $\mathbf{Z}$-module libre.

(4) Montrer qu'un $\mathbf{Z}$-module libre ne contient pas d'éléments non nuls qui sont divisibles [1] par une infinité de $n \in \mathbf{N}_{>0}$.

On suppose désormais que $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ soit isomorphe à $\mathbf{Z}^{(I)}$ avec I un ensemble.

(5) Prouver que I est infini.

(6) Montrer qu'il existe un sous-ensemble dénombrable J de I tel que $\mathbf{Z}^{(\mathbf{N})}$ soit contenu dans $\mathbf{Z}^{(J)}$ (via l'isomorphisme entre $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ et $\mathbf{Z}^{(I)}$).

(7) Montrer qu'il existe au moins un élément de $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}} \setminus \mathbf{Z}^{(J)}$ de la forme $(n_i)_{i \in \mathbf{N}}$ avec n_i qui divise strictement n_{i+1} pour tout $i \in I$ (suggestion : utiliser un argument qui concerne les cardinaux).

(8) Montrer que $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}} / \mathbf{Z}^{(J)}$ contient un élément non nul qui est divisible pour une infinité d'entiers positifs.

(9) Conclure.

Solution : 1. (1) Ça vient du fait que tout espace vectoriel possède une base.

(2) $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ n'est pas dénombrable car il contient $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ qu'il n'est pas. Par contre $\mathbf{Z}^{(\mathbf{N})} = \cup_{i=1}^{\infty} \mathbf{Z}^i$ est réunion dénombrable d'ensembles dénombrables.

(3) La projection $\mathbf{Z}^{(J)} \to \mathbf{Z}^{(J \setminus I)}$ induit un isomorphisme en passant au quotient.

(4) On peut supposer que le module est isomorphe à $M = \mathbf{Z}^{(I)}$ avec I un ensemble. Soit $x \in M$ divisible par une infinité d'entiers positifs. Pour tout $i \in I$ la i-ème composante x_i de x est alors divisible par une infinité d'entiers positifs. Ça implique que $x_i = 0$ pour tout $i \in I$ et donc $x = 0$.

(5) Le $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ contient le module libre de rang infini $\mathbf{Z}^{(\mathbf{N})}$, son rang est forcement infini s'il est libre.

(6) Chaque élément d'une base de $\mathbf{Z}^{(\mathbf{N})}$ est combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de la base canonique $(e_i)_{i \in I}$. Il suffit de prendre pour J les indices de cette réunion dénombrable d'ensembles finis.

1. Un élément y d'un $\mathbf{Z}$-module M est dit *divisible* par n s'il existe $x \in M$ tel que $y = nx$.

(7) Pour tout élément $(q_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de $(\mathbf{N}_{\geq 2})^{\mathbf{N}}$ on construit un élément de la forme $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ avec n_k qui divise strictement n_{k+1} pour tout $k \in \mathbf{N}$ en posant $n_k = \prod_{i=0}^{k} q_i$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. L'ensemble de ces éléments n'est par dénombrable : il existe donc un, notons-le x, qui n'est pas dans $\mathbf{Z}^{(J)}$ (qui est dénombrable).

(8) Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $x = \sum_{\ell=0}^{k-1} x_\ell e_\ell + n_k y$ avec $y \in \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$: cela montre que $\overline{x}$ est divisible par n_k pour tout $k \in \mathbf{N}$.

(9) Supposons que $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ est libre. Alors grâce à (8) on trouve un élément non nul d'un module libre (voir (3)) qui est divisible par une infinité de nombres entiers positifs. Mais ça n'est pas possible par (4).