

Devoir maison n°2

À rendre le 1^{er} décembre

Soient K un corps et X une indéterminée. On note $A = K[X, X^{-1}]$ le localisé de l'anneau de polynômes $K[X]$ par rapport à la partie multiplicative $\{X^n\}_{n \in \mathbf{N}}$. C'est un sous-anneau du corps $K(X)$ des fractions rationnelles. Notons que si $f \in A \setminus \{0\}$, il existe $v(f) \in \mathbf{Z}$ et $g \in K[X] \setminus XK[X]$ uniques tels que $f = X^{v(f)}g$ (on ne demande pas de prouver ce fait). Bien entendu, $K[X]$ est un sous-anneau de A . De même, $K[X^{-1}] = \{P(X^{-1})\}_{P \in K[X]}$ est lui aussi un sous-anneau de A .

(1) Montrer que $A^\times = K^\times X^{\mathbf{Z}} := \{\lambda X^n\}_{\substack{\lambda \in K^\times \\ n \in \mathbf{Z}}}$.

(2) Montrer que A est principal. Est-il euclidien ?

Munissons $M_n(A)$ de la relation d'équivalence donnée par

$$M_1 \sim M_2 \Leftrightarrow (\exists U \in \mathrm{GL}_n(K[X]) (\exists V \in \mathrm{GL}_n(K[X^{-1}])) M_2 = UM_1V^{-1}$$

(il n'est pas demandé de justifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence). Le but du problème est de prouver l'énoncé suivant.

Théorème (Dedekind-Weber) Si $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et $M \in \mathrm{GL}_n(A)$, il existe des entiers relatifs $d_1 \geq \dots \geq d_n$ uniques tels que

$$(*) \quad M \sim \mathrm{diag}(X^{d_1}, \dots, X^{d_n}).$$

Si en outre M est à coefficients dans $K[X]$, on a $d_n \geq 0$.

(3) Montrer que pour prouver le théorème, il suffit de traiter le cas où M est à coefficients dans $K[X]$, ce qu'on suppose désormais.

(4) Fixons $M \in \mathrm{GL}_n(A)$. Le but de cette question est de montrer l'existence d'une décomposition (*). On procède par récurrence sur $n \in \mathbf{N}_{>0}$.

(a) Traiter le cas $n = 1$.

(b) Montrer qu'il existe $U_0 \in \mathrm{SL}_n(K[X])$ telle que $U_0M = \begin{pmatrix} f & L \\ 0 & M' \end{pmatrix}$ (écriture par blocs) avec $f \in K[X]$, $L \in M_{1,n-1}(K[X])$ et $M' \in \mathrm{GL}_{n-1}(A) \cap M_n(K[X])$.

(c) En déduire qu'il existe des entiers naturels d_1, \dots, d_n tels que $d_2 \geq \dots \geq d_n$ et $f_2, \dots, f_n \in A$ de sorte que M soit équivalente à

$$(\clubsuit) \quad \begin{pmatrix} X^{d_1} & f_2 & \dots & \dots & f_n \\ 0 & X^{d_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & X^{d_n} \end{pmatrix}.$$

(d) Expliquer pourquoi on peut supposer que $f_j \in \langle X^{d_1+1} \rangle \subset K[X]$ et $\deg(f_j) < d_j$ pour tout $j \in \{2, \dots, n\}$.

(e) Expliquer pourquoi parmi toutes les matrices de la forme (\clubsuit) équivalentes à M , il en existe une telle que d_1 soit maximal. Prouver que pour une telle matrice, on a $d_1 \geq d_2$.

(f) Conclure.

(5) On veut maintenant prouver l'unicité dans le théorème de Dedekind-Weber. Il s'agit de montrer que si $d_1 \geq \dots \geq d_n$ et $d'_1 \geq \dots \geq d'_n$ sont des suites décroissantes d'entiers relatifs, $U \in \mathrm{GL}_n(K[X])$ et $V \in \mathrm{GL}_n(K[X^{-1}])$ tels que

$$(\spadesuit) \quad U \operatorname{diag}(X^{d_1}, \dots, X^{d_n}) = \operatorname{diag}(X^{d'_1}, \dots, X^{d'_n})V,$$

alors on a $d_i = d'_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Là encore, on raisonne par récurrence sur $n \in \mathbf{N}_{>0}$, le cas $n = 1$ étant trivial (parce que $\mathrm{GL}_1(K[X]) = K^\times = \mathrm{GL}_1(K[X^{-1}])$) : supposons $n \geq 2$.

(a) En traduisant (\spadesuit) coefficient par coefficient, montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe $\sigma(i) \in \{1, \dots, n\}$ tel que $d_{\sigma(i)} \leq d'_i$. En déduire que $d_n \leq d'_n$, puis que $d_n = d'_n$.

(b) Notons r (resp. s) le plus petit indice $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $d_i = d_n$ (resp. $d'_i = d_n$). Montrer que l'égalité (\spadesuit) implique que $r = s$, et conclure en écrivant U et V par blocs.

Remarque. Mine de rien, ce qui précède fournit une démonstration d'un théorème de géométrie algébrique (dû à Grothendieck, en 1957). On se place sur la droite projective \mathbf{P}_K^1 : c'est la réunion des deux ouverts « affines » $\mathcal{U} = \operatorname{Spec}(K[X])$ et $\mathcal{V} = \operatorname{Spec}(K[T])$ recollés le long des ouverts $\mathcal{U}_0 = \operatorname{Spec}(K[X, X^{-1}])$ et $\mathcal{V}_0 = \operatorname{Spec}(K[T, T^{-1}])$ via l'isomorphisme $K[X, X^{-1}] \rightarrow K[T, T^{-1}]$ défini par $X \mapsto T^{-1}$. Dans ce qui suit, il sera commode d'écrire X^{-1} au lieu de T . Il existe une notion générale de fibré vectoriel sur un « schéma » \mathcal{X} (heuristiquement, un fibré vectoriel est un espace vectoriel qui varie algébriquement au-dessus de \mathcal{X}). Dans le cas $\mathcal{X} = \mathbf{P}_K^1$ qui nous occupe, cela correspond à la donnée d'un $k[X]$ -module libre L_1 et d'un $K[X^{-1}]$ -module L_2 , munis d'une donnée de recollement, c'est-à-dire d'un isomorphisme $A \otimes_{K[X]} L_1 \xrightarrow{\sim} A \otimes_{K[X^{-1}]} L_2$. Après le choix de bases de L_1 et L_2 , cela correspond à la donnée d'un élément de $M \in \mathrm{GL}_n(A)$ (où n est le rang de L_1 sur $K[X]$, qui est aussi le rang de L_2 sur $K[X^{-1}]$). On s'en doute, changer les bases de L_1 et de L_2 remplace M par une matrice équivalente. Il en résulte que classifier les fibrés vectoriels de rang n sur \mathbf{P}_K^1 revient à classifier les éléments de $\mathrm{GL}_n(A)$ modulo équivalence. Le théorème de Dedekind-Weber montre qu'un tel fibré \mathcal{L} se décompose en somme directe de fibrés de rang 1 : on a $\mathcal{L} = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}(d_i)$ avec $d_1 \geq \dots \geq d_n$ uniquement déterminés, où $\mathcal{O}(d)$ est le fibré $(K[X], K[X^{-1}], \text{multiplication par } X^d \text{ sur } K[X, X^{-1}])$.