

---

## Devoir surveillé

---

*Les documents et les calculatrices sont interdits.  
La qualité de la rédaction sera un facteur d'appréciation important.  
Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires.*

### Questions de cours

- (1) Donner un exemple (en le justifiant) de  $\mathbf{Z}$ -module non libre.
- (2) Expliquer pourquoi l'anneau  $\mathbf{Z}[X, Y, Z]/\langle X^{20} + Y^{10} + Z^{2025} \rangle$  est noethérien.

### Exercice 1

Écrire  $P = X^3Y^3 + X^3Z^3 + Y^3Z^3$  comme polynôme en les polynômes symétriques élémentaires.

### Exercice 2

Soient  $A$  un anneau,  $M$  un  $A$ -module,  $M_1$  et  $M_2$  des sous-modules de  $M$ . On suppose que  $M/M_1$  et  $M/M_2$  sont noethériens. Montrer que  $M/M_1 \cap M_2$  est noethérien.

### Exercice 3

Soient  $A$  un anneau,  $M$  un  $A$ -module de type fini et  $f: M \rightarrow A^n$  une application  $A$ -linéaire surjective.

- (1) Montrer que  $f$  admet un inverse à droite  $g$  (c'est-à-dire une application  $A$ -linéaire  $g: A^n \rightarrow M$  telle que  $f \circ g = \text{Id}_{A^n}$ ).
- (2) Montrer que  $M = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$ .
- (3) Montrer que  $\text{Ker}(f)$  est de type fini.