Université de Bordeaux **2025-2026**
Semestre 7 **Modules, Algèbre commutative**

Examen

Les documents et les calculatrices sont interdits.
La qualité de la rédaction sera un facteur d'appréciation important.
Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires.

Questions de cours

(1) Un sous-anneau d'un anneau factoriel est-il toujours factoriel ?
(2) Montrer que le $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Q}$ n'est pas de type fini.
(3) Soient A un anneau principal, $a, b \in A$ non tous nuls et $d = \mathsf{pgcd}(a, b)$. Construire explicitement une matrice $M \in \mathsf{SL}_2(A)$ telle que $M \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} d \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 1

(1) Quels sont les facteurs invariants du groupe fini $(\mathbf{Z}/360\,\mathbf{Z})^\times$?
(2) Construire une matrice $M \in \mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ dont la première ligne est $(6, 10, 15)$.
(3) Donner les invariants de similitude d'un endomorphisme diagonalisable dont le polynôme caractéristique vaut $X(X+1)^2(X+2)^3 \in \mathbf{C}[X]$.

Exercice 2

Posons $A = \mathbf{Z}[i\sqrt{5}] \subset K = \mathbf{Q}(i\sqrt{5})$. Si $z = x + yi\sqrt{5} \in K$ (avec $x, y \in \mathbf{Q}$), on pose $N(z) = x^2 + 5y^2$.
(1) Montrer que si $z_1, z_2 \in K$, on a $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$.
(2) Soit $z \in A$. Montrer que $z \in A^\times \Leftrightarrow N(z) \in \{\pm 1\}$.
(3) Montrer que $2 + i\sqrt{5}$ et 3 ont un pgcd, mais que l'idéal $\langle 2 + i\sqrt{5}, 3\rangle$ n'est pas principal.
(4) Montrer que $2 + i\sqrt{5}$ et 3 n'ont pas de ppcm [indication : on montrera que l'ensemble des multiples communs à $2 + i\sqrt{5}$ et 3 est l'idéal $(2 + i\sqrt{5})\langle 1 + i\sqrt{5}, 3\rangle$].
(5) L'anneau A est-il factoriel ?

Exercice 3

Si A est un groupe abélien et p un nombre premier, on note $A(p)$ l'ensemble des éléments de A qui sont annulés par une puissance de p.
(1) Montrer que $A(p)$ est un sous-groupe de A.
(2) Si A est fini, construire un isomorphisme $\prod_{k=1}^{r} A(p_k) \xrightarrow{\sim} A$ où $p_1, \ldots, p_r$ sont les facteurs premiers de $\#A$.
(3) Combien y a-t-il de groupes abéliens d'ordre 360 à isomorphisme près ?

Exercice 4

Soit $f\colon \mathbf{Z}^3 \to \mathbf{Z}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x + 2y + 4z, 4x - 2y - 4z)$.
(1) Montrez sans calculs que $\mathsf{Ker}(f)$ est facteur direct de $\mathbf{Z}^3$.
(2) Déterminez des bases adaptées de $\mathsf{Ker}(f)$ et de $\mathsf{Im}(f)$.
(3) Calculer les facteurs invariants du $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Z}^2 / \mathsf{Im}(f)$.