
Examen du 23 juin 2025

*Les documents et les calculatrices sont interdits.
La qualité de la rédaction sera un facteur d'appréciation important.
Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires.*

Questions de cours

- (1) Soient A un anneau principal et $\pi \in A$. Montrer que π est irréductible si et seulement si l'idéal $\langle \pi \rangle$ est maximal.
- (2) Énoncer le théorème de la base adaptée.

Exercice 1

- (1) Quels sont les facteurs invariants du groupe fini $(\mathbf{Z}/23\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2025\mathbf{Z})$?
- (2) Trouver une base adaptée pour le sous-groupe $L \subset \mathbf{Z}^3$ engendré par

$$\{(-4, 4, 2), (16, -4, -8), (8, 4, 2)\}.$$

Calculer le quotient $\mathbf{Z}^3/L$.

- (3) Construire une matrice $M \in \mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$ dont la première ligne est $(6, 10, 5)$.

Exercice 2

Soient K un corps, $d \in \mathbf{N}_{>0}$ et $A, B \in \mathrm{M}_d(K)$. On suppose que A et B ont même polynôme minimal et même polynôme caractéristique.

- (1) Montrer que si $d = 3$, alors A et B sont semblables.
- (2) Lorsque $d = 4$, donner un exemple pour lequel A et B ne sont pas semblables.

Exercice 3

Posons $A = \mathbf{R}[X, Y]/\langle X^3 + Y^2 - 1 \rangle$. On note x et y les images de X et de Y dans A .

- (1) Montrer que A est intègre.
- (2) Montrer que l'unique morphisme $\mathbf{R}[X] \rightarrow A$ qui envoie tout réel sur (la classe de) lui-même et X sur x est injectif. Il induit donc un isomorphisme $\mathbf{R}[X] \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}[x] \subset A$.
- (3) Montrer que $A = \mathbf{R}[x] \oplus \mathbf{R}[x]y$. Tout élément de A s'écrit donc de façon unique sous la forme $P(x) + Q(x)y$ avec $P(x), Q(x) \in \mathbf{R}[x]$.
- (4) Si $\alpha = P(x) + Q(x)y$, on pose $\bar{\alpha} = P(x) - Q(x)y$. Montrer que $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ est un automorphisme de l'anneau A .
- (5) Montrer que pour tout $\alpha \in A$, on a $N(\alpha) := \alpha\bar{\alpha} \in \mathbf{R}[x]$, puis que $N: A \rightarrow \mathbf{R}[x]$ est multiplicative (i.e. que $N(\alpha_1\alpha_2) = N(\alpha_1)N(\alpha_2)$).
- (6) Montrer que $\alpha \in A^\times \Leftrightarrow N(\alpha) \in \mathbf{R}^\times$.
- (7) Montrer que si $\alpha = P(x) + Q(x)y$ avec $P(x), Q(x) \in \mathbf{R}[x]$, on a

$$\deg(N(\alpha)) = \max\{2\deg(P), 2\deg(Q) + 3\}$$

(on rappelle que $\deg(0) = -\infty$). En déduire que y est irréductible dans A .

- (8) Décrire $A/\langle y \rangle$ et en déduire que A n'est pas factoriel.

Exercice 4

Soient A un anneau factoriel et K son corps des fractions.

- (1) Soient $P_1, P_2 \in K[X]$ unitaires tels que $P_1 P_2 \in A[X]$. Montrer que $P_1, P_2 \in A[X]$.
- (2) Soient $d, n \in \mathbf{N}_{>0}$ et $M \in \mathbf{M}_d(K)$ telle que $M^n = \mathrm{I}_d$.
 - (a) Montrer que les invariants de similitude de M appartiennent à $A[X]$.
 - (b) En déduire que M est conjuguée à un élément de $\mathbf{M}_d(A)$.