Université de Bordeaux — **2025-2026**
Semestre 7 — **Modules, Algèbre commutative**

Examen - session 2

Les documents et les calculatrices sont interdits.
La qualité de la rédaction sera un facteur d'appréciation important.
Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires.

Questions de cours

(1) L'anneau $\mathbf{C}[X,Y]$ est-il principal ? Justifier.
(2) Le $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Q}\,/\,\mathbf{Z}$ est-il noethérien ? Justifier.
(3) Soient K un corps et $P \in K[X]$ unitaire. Montrer qu'à similitude près, il n'existe qu'un nombre fini de matrices dont le polynôme caractéristique vaut P.

Exercice 1

(1) Écrire le polynôme symétrique $X^4 + Y^4 + Z^4$ comme polynôme en les polynômes symétriques élémentaires.
(2) Quels sont les facteurs invariants du groupe fini $\big((\mathbf{Z}\,/22\,\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}\,/6\,\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}\,/2026\,\mathbf{Z})\big)^{\times}$?
(3) Montrer que l'anneau $\mathbf{Z}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle$ est intègre.
(4) Construire deux éléments de $\mathsf{M}_7(\mathbf{C})$ qui ont même rang et mêmes polynômes minimal et caractéristique, mais qui ne sont pas semblables.

Exercice 2

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 1 \\ 1 & 5 & 23 & 15 \\ 1 & 3 & 15 & 7 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{3,4}(\mathbf{Z})$, que l'on voit comme une application $\mathbf{Z}$-linéaire de $\mathbf{Z}^4$ dans $\mathbf{Z}^3$.
(1) Calculer ses facteurs invariants. Quelle est la structure de $\mathbf{Z}^3\,/\,\mathsf{Im}(A)$?
(2) Expliquer sans calcul pourquoi $\mathsf{Ker}(A)$ est facteur direct de $\mathbf{Z}^4$.
(3) Construire une base d'un facteur direct de $\mathsf{Ker}(A)$ dans $\mathbf{Z}^4$.
(4) Construire une base adaptée à $\mathsf{Im}(A)$ dans $\mathbf{Z}^3$.

Exercice 3

Soit $A \in \mathsf{M}_n(\mathbf{Z})$ et $b_1, \ldots, b_k \in \mathbf{Z}$ tels que $\det(A) = b_1 \cdots b_k$. On veut montrer qu'il existe $B_1, \ldots, B_k \in \mathsf{M}_n(\mathbf{Z})$ telles que $A = B_1 \cdots B_k$ et $\det(B_i) = b_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$.
(1) Traiter le cas où $k = 2$ et b_1 est premier.
(2) Traiter le cas où $k = 2$ et $b_1 = 0$.
(3) Conclure dans le cas général.

Exercice 4

Notons $I \subset \mathbf{Z}[X]$ l'idéal engendré par 2 et X. Montrer que I est un sous-$\mathbf{Z}[X]$-module de $\mathbf{Z}[X]$ qui ne peut pas se décomposer en somme directe de sous-$\mathbf{Z}[X]$-modules cycliques, *i.e.* qu'on ne peut pas trouver $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}[X]$ tels que $I = a_1\,\mathbf{Z}[X] \oplus \cdots \oplus a_n\,\mathbf{Z}[X]$.