Exercice bonus

Exercice

Soit A un anneau intègre.

(1) Montrer que si A est factoriel, alors tout idéal premier non nul de A contient un élément premier.

(2) On va prouver la réciproque (c'est un résultat dû à Kaplansky). On suppose donc que tout idéal premier non nul de A contient un élément premier. On note S l'ensemble des éléments de $A \setminus \{0\}$ inversibles ou qui s'écrivent comme produit d'un nombre fini d'éléments premiers. C'est une partie multiplicative de A.

(a) Soit $a \in A \setminus \{0\}$. Supposons $\langle a \rangle \cap S = \varnothing$. Montrer que l'ensemble $\mathscr{E}$ des idéaux $I \subset A$ tels que $a \in I$ et $I \cap S = \varnothing$ contient un élément maximal $\mathfrak{p}$ (pour l'inclusion).

(b) Montrer que $\mathfrak{p}$ est premier dans A, et en déduire une contradiction. Il existe donc $b \in A \setminus \{0\}$ tel que $ab = u\pi_1 \cdots \pi_r$ avec $u \in A^\times$ et $\pi_1, \ldots, \pi_r \in A$ premiers.

(c) En raisonnant par récurrence sur r, montrer que $a \in S$. On a donc $S = A \setminus \{0\}$.

(d) Montrer que tout élément irréductible de A est premier et conclure.

(3) Soit R un anneau principal. En utilisant le critère qui précède, montrer que l'anneau des séries formelles $A = R[\![X]\!]$ est factoriel [indication : si $\mathfrak{p} \subset A$ est un idéal premier non nul, considérer l'ensemble des coefficients constants des éléments de $\mathfrak{p}$].