PURETÉ DE ZARISKI-NAGATA POUR CERTAINS ESPACES RIGIDES

OLIVIER BRINON AND ABDELLAH MOKRANE

Soient k un corps parfait de caractéristique positive $p>0$ et $W=\mathrm{W}(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt (de longueur infinie) à coefficients dans k. On note K le corps des fractions de W. Si A est une W-algèbre et M un A-module, on pose $M_K=M\otimes_W K$ et $M_k=M\otimes_W k$.

Rappelons qu'une W-algèbre admissible est une W-algèbre plate, séparée complète pour la topologie p-adique, topologiquement de type fini au sens de [1, §7.3 Definition 3]. Un schéma formel admissible sur W est un schéma formel séparé et quasi-compact sur W, localement spectre formel d'une W-algèbre admissible.

Dans la catégorie des schémas formels admissibles sur W, un éclatement le long d'un idéal qui contient une puissance de p est dit admissible. À tout schéma formel de type fini $\mathcal{X}$ sur W, on associe un K-espace rigide $\mathcal{X}_K$ par passage à la fibre générique (dans le cas affine, on a $\mathsf{Spf}(A)_K=\mathsf{Spm}(A_K)$). Ce foncteur induit une équivalence de catégories entre la catégorie des schémas formels admissibles sur W localisée en les morphismes qui sont des éclatements admissibles, et la catégorie des espaces analytiques rigides séparés et quasi-compacts sur K (*cf* [1, §8.4 Theorem 3] & [8]).

Si A est une W-algèbre admissible, on a en particulier une bijection entre l'ensemble des idéaux premiers non ouverts $\mathfrak{p}\subset A$ tels que $\dim(A/\mathfrak{p})=1$ et $\mathsf{Spm}(A_K)$, qui à $\mathfrak{p}$ associe $\mathfrak{p}_K$ (l'application réciproque étant donnée par $\mathfrak{m}\mapsto\mathfrak{m}\cap A$, *cf* [1, §8.3 Lemma 6]).

Si $\mathcal{X}$ est un schéma formel admissible sur W, on dispose d'une application continue et surjective $\mathrm{sp}\colon\mathcal{X}_K\to\mathcal{X}_k$ appelée spécialisation (où $\mathcal{X}_k$ désigne la fibre spéciale de $\mathcal{X}$). Lorsque $\mathcal{X}=\mathsf{Spf}(A)$ avec A une W-algèbre admissible, et $\mathfrak{p}\subset A$ est un idéal premier non ouvert tel que $\dim(A/\mathfrak{p})=1$, on a $\mathrm{sp}(\mathfrak{p}_K)=\mathsf{Ker}\big(A_k\to(A/\mathfrak{p})_k\to(A/\mathfrak{p})_k/\operatorname{rad}((A/\mathfrak{p})_k)\big)$ (*cf* [1, §8.3]).

Dans cette note, les revêtements d'espaces rigides considérés sont finis étales au sens algébrique, *i.e.* localement de la forme $\mathsf{Spm}(S)\to\mathsf{Spm}(R)$ où $R\to S$ est un morphisme fini étale de K-algèbres affinoïdes.

On fixe désormais $\mathcal{X}$ un schéma formel admissible sur W. On suppose sa fibre générique $X=\mathcal{X}_K$ régulière.

Théorème 1. *Soient $C\subset\mathcal{X}_k$ un sous-schéma fermé de codimension supérieure à 2 et $U=\mathrm{sp}^{-1}(\mathcal{X}_k\setminus C)\subset X$. Tout un revêtement fini étale $T_U\to U$ se prolonge de façon unique en un revêtement fini étale de X.*

Lemme 2. *Si R est une W-algèbre admissible, alors R est excellent, donc (universellement) japonais.*

Démonstration. D'après [9, Theorem 9], l'anneau $W\{T_1,\dots,T_d\}$ est excellent. Il existe un morphisme surjectif $f\colon W\{T_1,\dots,T_d\}\to R$: l'anneau R est donc de type fini comme $W\{T_1,\dots,T_d\}$-algèbre, ce qui implique que R est excellent (*cf* [2, Scholie 7.8.3 (ii)]), donc universellement japonais (*cf* [2, Scholie 7.8.3 (vi)]). □

Démonstration du théorème 1. On suit de près la preuve du théorème de Zariski-Nagata (*cf* [4, Exposé X, Théorème 3.4]). Soit $\mathcal{U}$ le schéma formel restriction de $\mathcal{X}$ à $\mathcal{X}_k\setminus C$. On note $j\colon\mathcal{U}\to\mathcal{X}$ l'immersion ouverte et $j_K\colon U\to X$ sa fibre générique.
Si $\dim(\mathcal{X}_k)\leq 1$, il n'y a rien à faire : supposons désormais $\dim(\mathcal{X}_k)\geq 2$. Le revêtement fini étale $T_U\to U$ est donné par un faisceau $\mathscr{B}_U$ de $\mathcal{O}_U$-algèbres localement libres de rang fini. Notons $\mathscr{B}_{\mathcal{U}}$

Date: January 30, 2017.
Avec le soutien du projet ANR Blanc PerCoLaTor : ANR-14-CE25

le faisceau en $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$-algèbres normalisation de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ dans $\mathscr{B}_U$. D'après le lemme 2, le faisceau $\mathscr{B}_{\mathcal{U}}$ est cohérent (rappelons que $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ est cohérent).
Montrons que $\mathscr{B} := (j_*\mathscr{B}_{\mathcal{U}})_K$ est cohérent sur X. D'après [3, Corollary 6.9.11], il existe un faisceau cohérent $\mathscr{C}$ sur $\mathcal{X}$ qui prolonge $\mathscr{B}_{\mathcal{U}}$. Soient $\mathsf{Spf}(A) \subset \mathcal{X}$ un ouvert affinoïde (avec A une W-algèbre admissible) et $I \subset A$ un idéal non ouvert relevant l'idéal définissant $C \cap \mathsf{Spec}(A_k)$. Le faisceau cohérent $\mathscr{C}$ correspond à un A-module de type fini M. Soit $x \in \mathsf{Spec}(A_K) \setminus \mathrm{V}(I_K)$ tel que $c(x) := \operatorname{codim}\big(\overline{\{x\}} \cap Y, \overline{\{x\}}\big) = 1$ (*cf* notations de [4, Exposé VIII, 2.1], relativement au fermé $Y = \mathrm{V}(I_K)$). Comme $x \notin \mathrm{V}(I_K)$, le point x correspond à un idéal premier $\mathfrak{q} \subset A$ tel que $I_K \not\subset \mathfrak{q}_K$. Comme $A_K/\mathfrak{q}_K$ est affinoïde donc un anneau de Jacobson (*cf* [1, §3.1 Proposition 3]), et comme l'image de I dans $A_K/\mathfrak{q}_K$ est non nulle, il existe un idéal premier non ouvert $\mathfrak{p} \subset A$ tel que $\mathfrak{p}_K$ soit maximal dans A_K, contienne $\mathfrak{q}_K$ et pas I_K. On a donc $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, $I \not\subset \mathfrak{p}$ et $\dim(A/\mathfrak{p}) = 1$. Si $x_1 \in \mathsf{Spm}(A_K)$ désigne le point correspondant à $\mathfrak{p}_K$, on a donc $\mathrm{sp}(x_1) \notin C$, et donc que $M_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module libre de rang fini. En localisant, cela implique que $M_{\mathfrak{q}}$ est un $A_{\mathfrak{q}}$-module libre de rang fini : on a $\operatorname{prof}_x(\mathscr{C}) := \operatorname{prof}(M_{\mathfrak{q}}) = \dim(A_{\mathfrak{q}}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{q}) > 0$ (parce que $c(x) = 1$). Comme c'est vrai pour tout x tel que $c(x) = 1$, le théorème de finitude (*cf* [4, Exposé VIII, Corollaire 2.3]) implique que $(j_*\mathscr{B}_{\mathcal{U}})_K$ est cohérent.

Montrons par récurrence sur $n = \dim(\mathcal{X}_k)$ que $\mathscr{B}$ définit un faisceau d'algèbres étales sur X. Soit $x_0 \in \mathrm{sp}^{-1}(C)$. Fixons un ouvert affinoïde $\mathsf{Spm}(A_K) \subset X$ contenant x_0 (avec A une W-algèbre admissible). Ce dernier correspond à un idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$ tel que $\dim(A/\mathfrak{p}) = 1$ et $p \notin \mathfrak{p}$. Comme $x_0 \in \mathrm{sp}^{-1}(C)$, on a $\overline{I} \subset \mathfrak{p}_k$. L'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ est régulier (car X l'est). Par ailleurs, $C \cap \mathsf{Spec}(A_k) = \mathrm{V}(\overline{I})$, avec $\operatorname{ht}(\overline{I}) \geq 2$ par hypothèse. Posons $\mathfrak{m} = \mathsf{Ker}(A \to (A/\mathfrak{p})_k \to (A/\mathfrak{p})_k/\operatorname{rad}((A/\mathfrak{p})_k))$: c'est l'unique idéal maximal de A qui contient $\mathfrak{p}$ et p (ce n'est autre que l'image inverse dans $\mathsf{Spec}(A)$ de $\mathrm{sp}(\mathfrak{p}_K) \in \mathsf{Spec}(A_k)$, *cf* [1, p.200]).

<u>Cas $n = 2$.</u> On a $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}_k) \geq \operatorname{ht}(\overline{I}) = 2$, donc $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}_k) = 2$ et $\mathfrak{p}_k$ est un idéal maximal de A_k. Par maximalité, on a $\operatorname{ht}(\mathfrak{m}) = 3$, de sorte que $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 2$, et $\mathfrak{p}$ est un idéal premier minimal contenant I_K. Montrons que $\operatorname{prof}(\mathscr{B}_{x_0}) \geq 2$: on peut se restreindre à $X_0 := \mathsf{Spec}(A_{\mathfrak{p}})$. Par construction, la restriction de $\mathscr{B}$ à X_0 est l'image directe d'un $\mathcal{O}_{X_0'}$-module, où $X_0' = X_0 \setminus \{x_0\}$. D'après [4, Exposé I, Corollaire 2.11], cela implique que $\underline{\mathrm{H}}^0_{x_0}(\mathscr{B}) = \underline{\mathrm{H}}^1_{x_0}(\mathscr{B}) = 0$, de sorte que $\operatorname{prof}(\mathscr{B}_{x_0}) \geq 2$ en vertu de [4, Exposé III, Proposition 3.3]. D'après le théorème d'Auslander-Buchsbaum (*cf* [7, Theorem 19.1]), $\operatorname{dimproj}(\mathscr{B}_{x_0}) + \operatorname{prof}(\mathscr{B}_{x_0}) = \operatorname{prof}(A_{\mathfrak{p}})$. Comme $A_{\mathfrak{p}}$ est régulier de dimension 2, on a $\operatorname{prof}(A_{\mathfrak{p}}) = 2$, ce qui implique $\operatorname{dimproj}(\mathscr{B}_{x_0}) = 0$, et donc que $\mathscr{B}_{x_0}$ est libre sur $A_{\mathfrak{p}}$. Comme c'est vrai pour tout x_0, il en résulte que $\mathscr{B}$ définit un revêtement fini et plat de X.
L'idéal discriminant Δ de $\mathscr{B}$ prolonge Δ_U, qui est inversible. Il est localement principal : quitte à se restreindre à des ouverts, on peut supposer Δ engendré par une section locale f de $\mathcal{O}_X$. La restriction $f_{|U}$ de f à U est inversible. Le théorème de Hartogs (principe de Koecher rigide analytique, *cf* [6, Satz 2] & [5, Proposition 2.10]) implique que $f_{|U}^{-1}$ se prolonge (uniquement) en une fonction g sur X. Par unicité du prolongement, on a $fg = 1$ (parce que c'est vrai sur U) : l'idéal Δ est inversible, ce qui montre que $\mathscr{B}$ définit un revêtement fini étale $T \to X$.

<u>Cas $n > 2$.</u> Notons $\{\overline{\mathfrak{P}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{P}}_s\}$ l'ensemble (éventuellement vide) des idéaux premiers de A_k qui sont de hauteur 2 et qui contiennent $\overline{I}$. Supposons que $\mathfrak{p}_k \subset \bigcup_{i=1}^s \overline{\mathfrak{P}}_i$: d'après le lemme d'évitement des idéaux premiers, il existe $i \in \{1, \ldots, s\}$ tel que $\mathfrak{p}_k \subset \overline{\mathfrak{P}}_i$, de sorte que $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}_k) \leq 2$. Comme $p \notin \mathfrak{p}$, on a $n = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) < \operatorname{ht}(\mathfrak{m})$: d'après [7, Theorem 13.6], on a $n \leq \operatorname{ht}(\mathfrak{p}_k)$, et donc $n \leq 2$, ce qui est contradictoire. On a donc $\mathfrak{p}_k \not\subset \bigcup_{i=1}^s \overline{\mathfrak{P}}_i$: on peut choisir $t \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^2$ de sorte que $t \notin \overline{\mathfrak{P}}_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$.
L'élément t est un paramètre régulier dans l'anneau local régulier $A_{\mathfrak{p}}$: l'anneau $(A/tA)_{\mathfrak{p}}$ est régulier. Comme $(A/tA)_K$ est excellent (*cf* lemme 2), le lieu $\operatorname{Reg}((A/tA)_K)$ est ouvert dans $\mathsf{Spec}((A/tA)_K)$: quitte à se restreindre à un ouvert affine $\mathsf{Spf}(A)$ plus petit, on peut supposer $(A/tA)_K$ intègre et régulier. Posons $\mathfrak{q} = \mathsf{Ker}(A \to (A/tA)_K)$, c'est un idéal premier de A contenant t. Quitte à se restreindre à un ouvert plus petit, on peut en outre supposer que $\mathfrak{q} = tA$. N'ayant pas de p-torsion l'anneau $A/\mathfrak{q}$ est une W-algèbre admissible (*cf* [1, 7.3 Corollary 5]).
Supposons qu'il existe $u, v \in A$ tels que $tu = pv$. Comme $\mathfrak{q} = tA$ est premier et $p \notin tA$ (parce que $t \in \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ et $p \in A_{\mathfrak{p}}^\times$), on a $v = tw$ avec $w \in A$, et donc $t(u - pw) = 0$ et donc $u = pw \in pA$. Cela

implique que t n'est pas diviseur de zéro dans A_k. Ce n'est pas non plus une unité (ce n'est pas une unité dans A qui est p-adiquement complet) : on a donc $\dim((A/\mathfrak{q})_k) = \dim(A_k) - 1$.
Soit $\overline{\mathfrak{P}} \in \mathrm{V}(\overline{I}) \cap \mathrm{V}(\mathfrak{q}_k) = C \cap \mathsf{Spec}((A/\mathfrak{q})_k)$. Si $\overline{\mathfrak{P}} \notin \{\overline{\mathfrak{P}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{P}}_s\}$, alors $\mathrm{ht}(\overline{\mathfrak{P}}) \geq 3$, de sorte que $\mathrm{ht}(\overline{\mathfrak{P}}/\mathfrak{q}_k) = \mathrm{ht}((\overline{\mathfrak{P}} + tA_k)/tA_k) \geq \mathrm{ht}(\overline{\mathfrak{P}}) - 1 \geq 2$. Si $\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{P}}_i$, alors $t \notin \overline{\mathfrak{P}}$, donc $\mathrm{ht}(\overline{\mathfrak{P}} + tA_k) > \mathrm{ht}(\overline{\mathfrak{P}}) = 2$, et $\mathrm{ht}(\overline{\mathfrak{P}}/\mathfrak{q}_k) = \mathrm{ht}((\overline{\mathfrak{P}} + tA_k)/tA_k) \geq \mathrm{ht}(\overline{\mathfrak{P}}) - 1 \geq 2$. Dans tous les cas, on a $\mathrm{ht}(\overline{\mathfrak{P}}/\mathfrak{q}_k) \geq 2$, ce qui implique que $C \cap \mathsf{Spec}((A/\mathfrak{q})_k)$ est de codimension ≥ 2 dans $\mathsf{Spec}((A/\mathfrak{q})_k)$. L'hypothèse de récurrence appliquée au schéma formel admissible $\mathsf{Spf}(A/\mathfrak{q})$ et à la restriction du faisceau $\mathscr{B}$ à sa fibre générique montrent que cette restriction définit un faisceau d'algèbres étales sur $\mathsf{Spf}(A/\mathfrak{q})_K$: si $B_K = \Gamma(\mathsf{Spf}(A)_K, \mathscr{B})$, la A_K/tA_K-algèbre B_K/tB_K est finie étale. Cela implique que le morphisme $\varprojlim_m A_K/t^m A_K \to \varprojlim_m B_K/t^m B_K$ est fini étale. Après changement de base par $\varprojlim_m A_K/t^m A_K \to \widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ (où $\widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ désigne le complété de l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$), le morphisme $\widehat{A}_{\mathfrak{p}} \to B_K \otimes_{A_K} \widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ est fini étale. Par fidèle platitude du morphisme $A_{\mathfrak{p}} \to \widehat{A}_{\mathfrak{p}}$, le morphisme $A_{\mathfrak{p}} \to B_K \otimes_{A_K} A_{\mathfrak{p}}$ est fini étale, de sorte que le faisceau d'algèbres $\mathscr{B}$ est fini étale en x_0. Comme c'est vrai pour tout $x_0 \in \mathrm{sp}^{-1}(C)$, on a fini. □

Les auteurs remercient Fabrizio Andreatta, Benoît Stroh et Jacques Tilouine pour les discussions qu'ils ont eues avec eux lors de l'élaboration de ce travail.

Références

[1] S. Bosch – *Lectures on formal and rigid geometry*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2105, Springer, Cham, 2014.

[2] A. Grothendieck & J. A. Dieudonné – « éléments de géométrie algébrique. IV. étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1965), no. 24, p. 231.

[3] ———, *Eléments de géométrie algébrique. I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 166, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[4] A. Grothendieck – *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2)*, Documents Mathématiques, vol. 4, Société Mathématique de France, Paris, 2005, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, 1962, Augmenté d'un exposé de Michèle Raynaud.

[5] P. L. Kassaei – « Modularity lifting in parallel weight one », *J. Amer. Math. Soc.* **26** (2013), no. 1, p. 199–225.

[6] W. Lütkebohmert – « Fortsetzbarkeit k-meromorpher Funktionen », *Math. Ann.* **220** (1976), no. 3, p. 273–284.

[7] H. Matsumura – *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1986, Translated from the Japanese by M. Reid.

[8] M. Raynaud – « Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl, ... », in *Table Ronde d'Analyse non archimédienne (Paris, 1972)*, Soc. Math. France, Paris, 1974, p. 319–327. Bull. Soc. Math. France, Mém. No. 39–40.

[9] P. Valabrega – « A few theorems on completion of excellent rings », *Nagoya Math. J.* **61** (1976), p. 127–133.

IMB, CNRS UMR 5251, Université Bordeaux, 33405 Talence, France
E-mail address: olivier.brinon@math.u-bordeaux1.fr

LAGA, CNRS UMR 7539, Université Paris 8, 93200 Saint-Denis, France
E-mail address: mokrane@math.univ-paris13.fr