“Soirée” IMB
Tout est sous contrôle

Sylvain Ervedoza

Institut de Mathématiques de Bordeaux
& CNRS.

Bordeaux
09/03/2021

Thèmes de recherche: Mathématiques appliquées

- Mathématiques appliquées,
- Théorie du contrôle,
- Équations aux dérivées partielles,
- Problèmes inverses,
- Interactions fluide-structure,
- ....

Une très (très) brève introduction à la théorie du contrôle:
Considérons un système dynamique

$$y' = f(y, u).$$

- y est l'état.
- f décrit la dynamique.
- u est le contrôle.

Théorie du contrôle

Décrire les actions possibles du contrôle sur l'état.

Exemples:

- Aller d'un point A à un point B,
- Se garer,
- Nager,
- Gouverner ...

Tout est dans le contrôle. - Michel Platini.

Outline

Aller d'un point A à un point B

Le problème du toboggan optimal

Étant donnés deux points A et B, quel est le toboggan optimal (sans frottements) pour atteindre B le plus vite possible en partant de A à vitesse nul?

$=$ Le brachistochrone (de "brachistos" et "chronos")

d'après J. Bernoulli (1696).

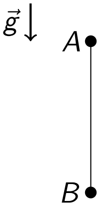


Figure: Cas trivial: Ligne verticale.

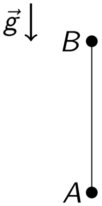


Figure: Cas trivial: Impossible.

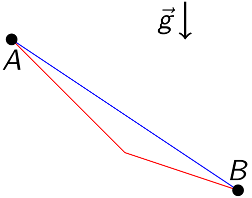
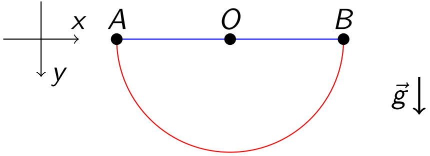


Figure: Courbe optimale ?

Galilée (1633)

La courbe optimale est un arc de cercle.



Quel est le meilleur toboggan ?

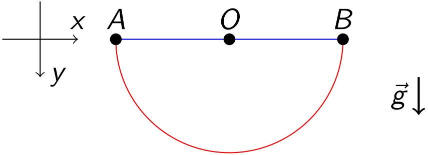
Pas de frottement $\Rightarrow$ l'énergie est préservée: $\frac{m}{2}|v|^2 = m\,g\,y$.

- Si on suit la ligne droite, vitesse nulle et donc temps infini.
- Si on suit l'arc de cercle, $v \simeq \sqrt{y}$, et on arrive en B au temps

$$T = \int_{x=x_A}^{x_B} \frac{dt}{dx}\,dx = \frac{R}{\sqrt{2g}} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin(\theta)}} < \infty.$$

Galilée (1633)

La courbe optimale est un arc de cercle.



Quel est le meilleur toboggan ?
Pas de frottement $\Rightarrow$ l'énergie est préservée: $\frac{m}{2}|v|^2 = m\,g\,y$.

- Si on suit la ligne droite, vitesse nulle et donc temps infini.
- Si on suit l'arc de cercle, $v \simeq \sqrt{y}$, et on arrive en B au temps

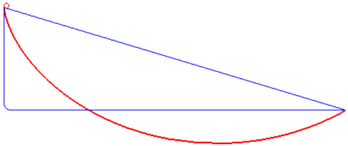
$$T = \int_{x=x_A}^{x_B} \frac{dt}{dx}\,dx = \frac{R}{\sqrt{2g}} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin(\theta)}} < \infty.$$

Problème: Galilée avait tort, on peut faire mieux !!

Quelle est la solution ?

Théorème: Brachistochrone = Cycloïde

Démontré par J. Bernoulli, J. Bernoulli, Leibniz, Newton, Marquis de l'Hôpital, Tschirnhaus en 1697.



Approche de Bernoulli, la nature "minimise" certaines quantités.

Optique géométrique, principe de Fermat

Pour aller de A à B, le rayon lumineux prend le chemin le plus rapide.

Une approche "Calcul des variations"

Une reformulation

Trouver la fonction $y_0 = y_0(x)$ qui minimise

$$J(y) = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{y(x)}} dx,$$

parmi toutes les fonctions y telles que $y(x_A) = 0$, $y(x_B) = y_B$.

$\leadsto$ Cadre différentiel.

Si y_0 est un minimiseur de J, l'équation d'Euler Lagrange donne

$$1 + (y_0'(x))^2 + 2y_0(x)y_0'(x) = 0.$$

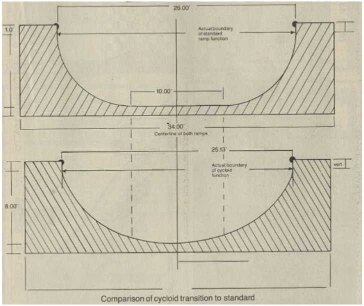
En fait, *acte fondateur du Calcul des Variations*.

Question

Les concepteurs de rampes de skate savent-ils que la rampe la plus rapide a une forme de cycloïde ?

Question

Les concepteurs de rampes de skate savent-ils que la rampe la plus rapide a une forme de cycloïde ?



Manifestement oui, mais il semblerait qu'il n'y en ait pas eu de réalisées...

Ref: mathcurve, wikipedia.

Et après ?

- Que faire en présence d'obstacles ?
  - Obstacles fixes ?

    $\rightsquigarrow$ Problème du skieur.
  - Obstacles dépendant du temps:

    $\rightsquigarrow$ Routage de voilier (Vendée Globe).
- Que se passe-t-il en présence de friction ? (Frottements)
- Si la vitesse initiale n'est pas nulle ?

Pour aller plus loin:
Ref: The brachistochrone problem and modern control theory, Sussman and Willems, 2000.

Outline

Le problème de la nage

- État: Position et vitesse du nageur.
- Contrôles: Déformation du nageur.

Problème très difficile, soumis également aux turbulences du fluide.

Dans un premier temps, on considère un fluide à bas Reynolds, i.e. avec des forces de viscosité dominantes devant l'inertie du fluide.

$\simeq$ un sirop avant d'ajouter de l'eau.

$=$ ce que vivent les petits animaux marins ($\leq 10^{-6}m$), les microrobots.

Ref: Life at low Reynolds number, E.M. Purcell, 1977.

A bas nombre de Reynolds:

- PAS D'INERTIE.
- Le mouvement à l'instant t est entièrement déterminé par les forces exercées à l'instant t.

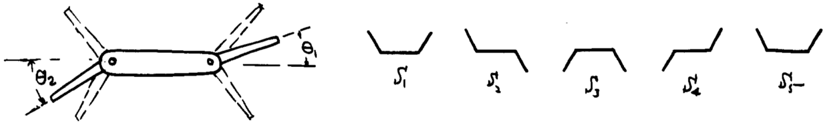
Théorème de la coquille St Jacques (Purcell 1977)

Nager avec un "reciprocal motion" est impossible.

En s'ouvrant et se fermant, la coquille fait des va-et-viens et reste sur place.

Comment avancer ??

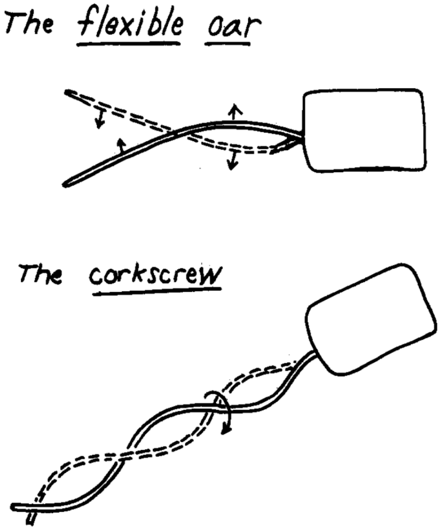
Plusieurs degrés de liberté: (Purcell 1977)



Défi: Où va-t-on avec ces mouvements ?

Autre exemple: Le nageur de Najafi Golestanian

Mais que fait la nature ?



Dessins extraits de Purcell 1977.

Questions en suspens:

- Quelle est la nage la plus efficace ?
  Cf articles de F. Alouges, L. Giraldi, A. de Simone.

- Et à nombre de Reynolds intermédiaire ?

  - "Les dauphins sont les nageurs les plus efficaces"
    $\rightsquigarrow$ Le paradoxe de Gray (Gray's paradox).
    Quelle est la nage la plus efficace ?

  - Pourquoi les nages de poissons sont-elles si similaires ?
    Quelle critère la nature sélectionne-t-elle ?

Merci pour votre attention !!

Contact: sylvain.ervedoza@math.u-bordeaux.fr.