

DES MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR MODÉLISER L'ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE

ALEXIS TARDIEU

ÉQUIPE MEMPHIS, INRIA-BSO
ÉQUIPE CSM, IMB

SOIRÉE IMB-UFMI

MARDI 18 OCTOBRE 2022



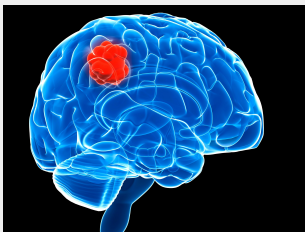
- 1 Le calcul scientifique
- 2 Les équations de la mécanique des fluides incompressibles
- 3 Méthodes d'ordre élevé de type Galerkin Discontinu

LE CALCUL SCIENTIFIQUE

LE CALCUL SCIENTIFIQUE : DÉFINITION

- Jonction entre mathématiques et informatique
- **Simulation numérique** de phénomènes physiques, chimiques, biologiques
- Outil de compréhension, prédiction, optimisation, contrôle
- Démarche du calcul scientifique :
 - ▷ **Modélisation** du phénomène \Rightarrow mise en équations (EDO, EDP)
 - ▷ **Analyse mathématique** : problème bien posé?
 - ▷ **Approximation numérique** : maillage + schéma en temps et en espace
 - ▷ **Implémentation** : quel langage ? quelles habitudes ?
 - ▷ **Validation** du code (solution exacte, convergence)

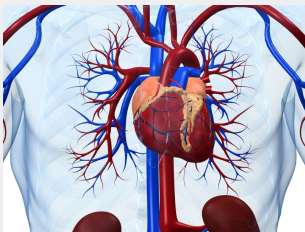
LE CALCUL SCIENTIFIQUE CHEZ INRIA BSO



(a) MONC



(b) CARDAMOM



(c) CARMEN



(d) MEMPHIS

LES ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES INCOMPRESSIBLES

- Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \eta \Delta \mathbf{u} - \nabla p + \rho \mathbf{g}. \quad (2.1)$$

- Condition d'incompressibilité

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.2)$$

⇒ Comment résoudre ce système d'équations ?



UNE MÉTHODE À PAS FRACTIONNAIRE

- Le schéma prédicteur-correcteur de Chorin-Temam

▷ Prédiction

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t^n} = -(\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^n + \nu \Delta \mathbf{u}^n - \frac{1}{\rho} \nabla p^n + \mathbf{g}. \quad (2.3)$$

▷ Correction

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t^n} = \frac{1}{\rho} (\nabla p^n - \nabla p^{n+1}). \quad (2.4)$$

- Pour assurer $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$, on doit résoudre une équation de Poisson

$$\Delta \Pi = \frac{\rho}{\Delta t^n} \nabla \cdot \mathbf{u}^*, \quad \Pi := p^{n+1} - p^n. \quad (2.5)$$

- Connaissant \mathbf{u}^* et Π , on déduit

$$p^{n+1} = p^n + \Pi, \quad \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \frac{\Delta t^n}{\rho} \nabla \Pi. \quad (2.6)$$

MÉTHODES D'ORDRE ÉLEVÉ DE TYPE GALERKIN DISCONTINU

UN DÉTOUR PAR LES DIFFÉRENCES FINIES (DF)

- Équation de transport sur $\Omega = \cup_j [x_j, x_{j+1}]$

$$\partial_t u + \partial_x (au) = 0 \quad (3.1)$$

- ▷ Euler explicite + DF décentrées en amont

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t^n} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (3.2)$$

- ▷ Euler explicite + DF centrées

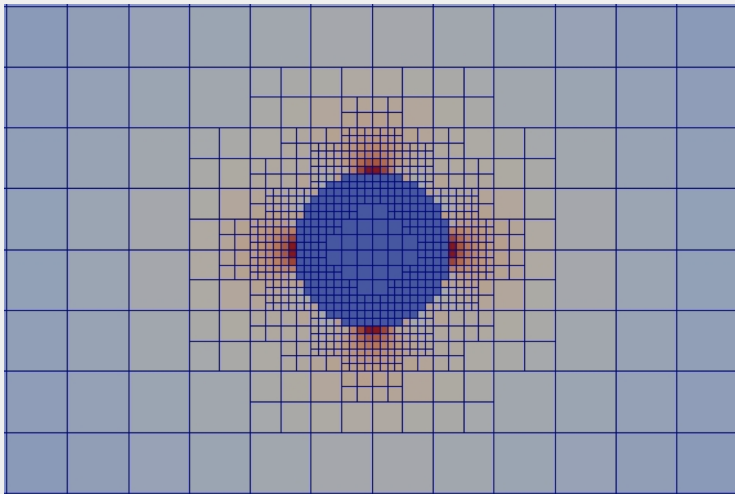
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t^n} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \dots \quad (3.3)$$

- Ordre d'une méthode numérique

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}(h^k) \Leftrightarrow |\mathcal{E}| \approx Ch^k \Leftrightarrow \ln |\mathcal{E}| \approx k \cdot \ln h + C' \quad (3.4)$$

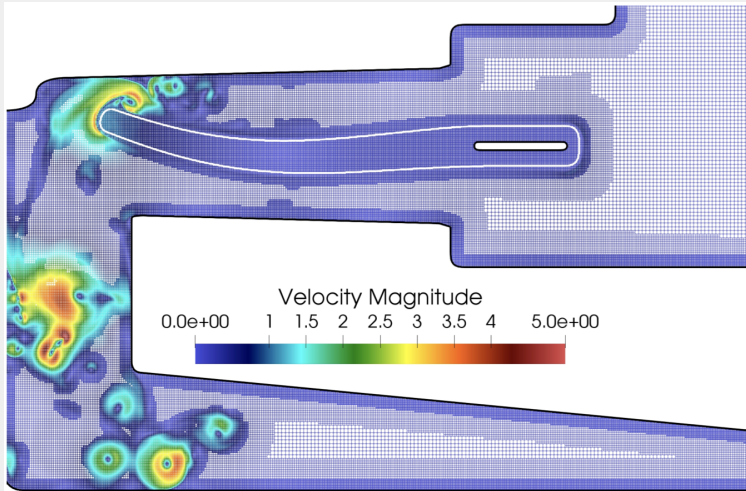
QUELQUES INCONVÉNIENTS DES DF (1/2)

- Travail de thèse d'Alice Raeli : DF sur quadtreees



QUELQUES INCONVÉNIENTS DES DF (2/2)

- Travail de thèse d'Antoine Fondanèche : VF sur quadtree



MÉTHODE DE GALERKIN DISCONTINU (GD)

- Problème de départ : trouver $u \in \mathcal{V}$ telle que (EDP sur u)
- Problème approché : trouver $u_h \in \mathcal{V}_h$ telle que (EDP sur u_h) avec $\bar{\mathcal{V}}_h = \mathcal{V}$
- Exemple d'un système de lois de conservation

$$\partial_t \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U}) = \mathbf{S}, \quad (3.5)$$

avec

$$\mathcal{V} = H^1(\Omega), \quad \mathcal{V}_h = \{ \phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall i, \phi|_{\omega_i} \in \mathbb{P}_k(\omega_i) \} \quad (3.6)$$

CHANGEMENT DE VARIABLES

- Après le changement de variables

$$x(\xi) := x_i + \xi \Delta x_i, \quad (3.7a)$$

$$t(\tau) := t^n + \tau \Delta t^n, \quad (3.7b)$$

l'équation dans la maille espace-temps physique $c_i^n := [x_i, x_{i+1}] \times [t^n, t^{n+1}]$

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}, \partial_x \mathbf{U}) = \mathbf{S}, \quad (3.8)$$

devient dans la maille espace-temps de référence $\hat{c} := [0, 1] \times [0, 1]$

$$\partial_\tau \hat{\mathbf{U}} + \left(\frac{\Delta t^n}{\Delta x_i} \right) \partial_\xi \hat{\mathbf{F}} \left(\hat{\mathbf{U}}, \frac{1}{\Delta x_i} \partial_\xi \hat{\mathbf{U}} \right) = \Delta t^n \hat{\mathbf{S}}. \quad (3.9)$$

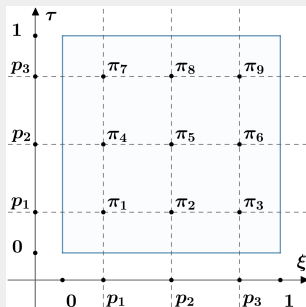
REPRÉSENTATION POLYNOMIALE PAR MAILLE

- Polynômes 1D de Lagrange $\theta_1, \dots, \theta_K$ passant par les points de quadrature 1D de Gauss-Legendre p_1, \dots, p_K

$$\theta_s(\rho) := \prod_{k \neq s} \left[\frac{\rho - p_k}{p_s - p_k} \right], \quad \rho = \xi, \tau. \quad (3.10)$$

- Polynômes 2D de Lagrange $\Theta_1, \dots, \Theta_L$ passant par les points de quadrature 2D de Gauss-Legendre π_1, \dots, π_L

$$\Theta_\ell(\xi, \tau) := \theta_s(\xi)\theta_{s'}(\tau). \quad (3.11)$$



MÉTHODE ADER-GD : PRÉDICTION

- Décompositions de degré $(K - 1)$ par rapport à ξ, τ

$$\hat{\mathbf{U}}^0(\xi) := \sum_{\ell=1}^K \hat{\mathbf{U}}_{\ell}^0 \theta_{\ell}(\xi), \quad \hat{\Phi}(\xi, \tau) := \sum_{\ell=1}^L \hat{\Phi}_{\ell} \Theta_{\ell}(\xi, \tau), \quad \hat{\Phi} = \hat{\mathbf{Q}}, \hat{\mathbf{F}}, \hat{\mathbf{S}}. \quad (3.12)$$

- Multiplication par une fonction de test $\Theta_k(\xi, \tau)$ + IPP en temps

$$\int_{\hat{\omega}} \int_{\hat{T}} \Theta_k \partial_{\tau} \hat{\mathbf{Q}} \, d\xi d\tau + \left(\frac{\Delta t^n}{\Delta x_j} \right) \int_{\hat{\omega}} \int_{\hat{T}} \Theta_k \partial_{\xi} \hat{\mathbf{F}} \, d\xi d\tau = \Delta t^n \int_{\hat{\omega}} \int_{\hat{T}} \Theta_k \hat{\mathbf{S}} \, d\xi d\tau, \quad (3.13)$$

En notant $\vec{\mathbf{U}}^0 := [\hat{\mathbf{U}}_1^0, \dots, \hat{\mathbf{U}}_K^0]^T \in \mathcal{M}_{K,C}(\mathbb{R})$ et $\vec{\Phi} := [\hat{\Phi}_1^0, \dots, \hat{\Phi}_L^0]^T \in \mathcal{M}_{L,C}(\mathbb{R})$, on obtient

$$\underline{A} \vec{\mathbf{Q}} + \underline{B} \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{C}}. \quad (3.14)$$

- RQ : si le flux physique \mathbf{F} est linéaire par rapport à \mathbf{Q} , alors $\vec{\mathbf{F}} := \underline{H} \vec{\mathbf{Q}}$ avec $\underline{H} \in \mathcal{M}_L(\mathbb{R})$, donc l'étape de prédiction devient

$$(\underline{A} + \underline{B} \underline{H}) \vec{\mathbf{Q}} = \vec{\mathbf{C}}. \quad (3.15)$$

MÉTHODE ADER-GD : CORRECTION

- Représentation polynomiale de degré D de la solution dans chaque maille spatiale

$$\hat{\mathbf{U}}(\xi, \tau) := \sum_{\ell=1}^{D+1} \hat{\mathbf{U}}_{\ell}^{\tau} \theta_{\ell}(\xi), \quad \forall \tau. \quad (3.16)$$

- Multiplication par une fonction de test $\theta_k(\xi)$ + IPP en temps et en espace

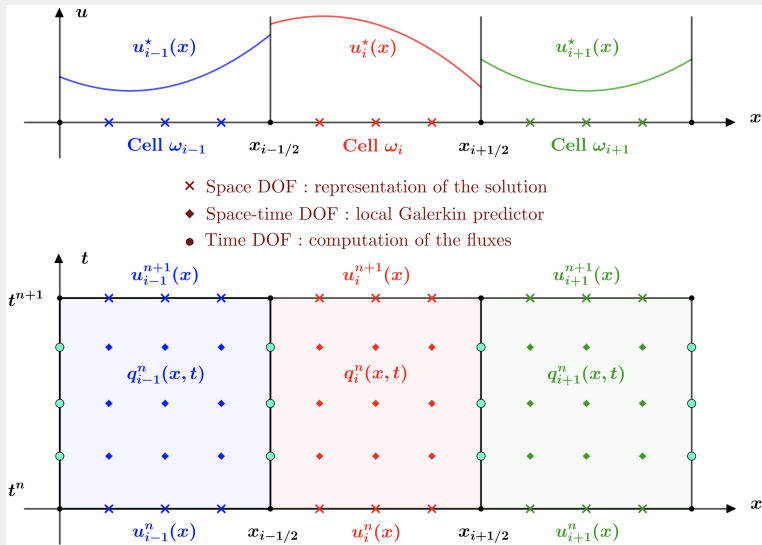
$$\int_{\hat{\omega}} \int_{\hat{\tau}} \theta_k \partial_{\tau} \hat{\mathbf{U}} \, d\xi d\tau + \left(\frac{\Delta t^n}{\Delta x_j} \right) \int_{\hat{\omega}} \int_{\hat{\tau}} \theta_k \partial_{\xi} \hat{\mathbf{F}} \, d\xi d\tau = \Delta t^n \int_{\hat{\omega}} \int_{\hat{\tau}} \theta_k \hat{\mathbf{S}} \, d\xi d\tau, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int_{\hat{\omega}} \theta_k \hat{\mathbf{U}}(\tau = 1) \, d\xi &= \int_{\hat{\omega}} \theta_k \hat{\mathbf{U}}(\tau = 0) \, d\xi + \left(\frac{\Delta t^n}{\Delta x_j} \right) \int_{\hat{\omega}} \int_{\hat{\tau}} \partial_{\xi} \theta_k \hat{\mathbf{F}} \, d\xi d\tau \\ &\quad - \left(\frac{\Delta t^n}{\Delta x_j} \right) \left(\int_{\hat{\tau}} \theta_k \hat{\mathbf{F}}(\xi = 1) d\tau - \int_{\hat{\tau}} \theta_k \hat{\mathbf{F}}(\xi = 0) d\tau \right) \\ &\quad + \Delta t^n \int_{\hat{\omega}} \int_{\hat{\tau}} \theta_k, \hat{\mathbf{S}} d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (3.18)$$

avec $\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{F}}(\hat{\mathbf{Q}})$, déduit de l'étape de prédiction.

MÉTHODE ADER-GD : RÉSUMÉ

- Comment MàJ des polynômes locaux avec une précision espace-temps élevée ?



Merci pour votre attention!

Pour m'écrire : alexis.tardieu@inria.fr