Optimisation mathématique

Mathématiques et algorithmique pour résoudre des problèmes de livraison

François Clautiaux
Équipe Realopt
Inria Bordeaux
Sud-Ouest

17 octobre 2022

SOMMAIRE

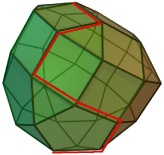
1
RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Mathématiques et algorithmique pour résoudre des problèmes réels

La recherche opérationnelle

- recherche mathématique de la façon d'opérer des choix pour aboutir au meilleur résultat possible (selon un critère pré-défini)
- branche appliquée des mathématiques, des liens forts avec l'informatique
- outil d'aide à la décision
- secteurs de prédilection : production, organisation, transport

$$\min\{c(s) : s \in \mathcal{S}\}$$

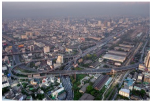


Problèmes typiques de recherche opérationnelle

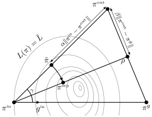
- planifier l'utilisation et gérer la production et l'acheminement de **l'énergie** ;
- planifier la **production**, le stockage, la **livraison** de produits ;
- concevoir un système de **transport en commun** ;
- organiser les **services publics** (hôpitaux, pompiers, police, collecte des déchets) ;
- concevoir des réseaux de communication ou informatiques ;
- établir des horaires de travail, cours, sport ;
- choisir des politiques économiques et financières.

Étapes d'un projet de recherche opérationnelle

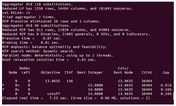
- Identification du problème à résoudre : ses leviers, ses contraintes, ses données



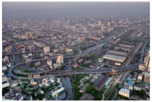
- Modélisation mathématique du problème et méthodes de résolution



- Mise en place informatique

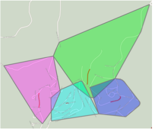


- Validation sur les données réelles

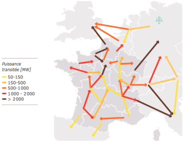


Application pratiques de l'équipe Edge

Exeo – Collecte de déchets



RTE – optimisation du réseau électrique



Ertus – Planification des traitements de la vigne

EDF – maintenance des centrales nucléaires

Difficulté des problèmes combinatoires

En optimisation combinatoire, l'espace des solutions est discret et fini : on peut énumérer toutes les solutions.

Difficulté des problèmes combinatoires

En optimisation combinatoire, l'espace des solutions est discret et fini : on peut énumérer toutes les solutions.

Par exemple : problème du voyageur de commerce.
Enumération de toutes les solutions sur un ordinateur.

- Pour 10 villes ($n = 10$) :
  Nombre de circuits $= 181\,440 \approx 2.10^6$.
  Temps d'évaluation $=$ 0.5 millièmes de seconde.

Difficulté des problèmes combinatoires

En optimisation combinatoire, l'espace des solutions est discret et fini : on peut énumérer toutes les solutions.

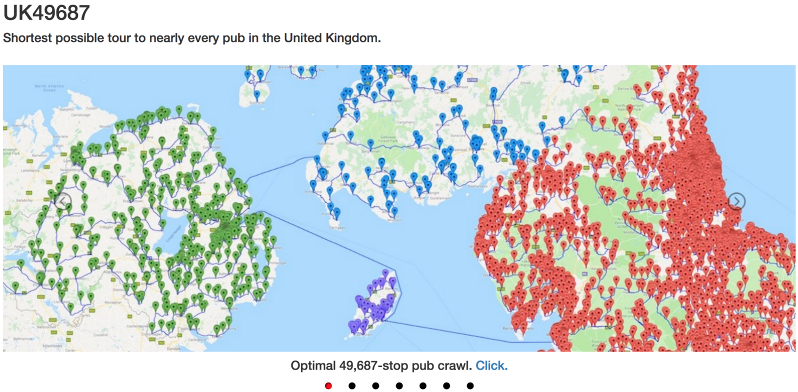
Par exemple : problème du voyageur de commerce.
Enumération de toutes les solutions sur un ordinateur.

- Pour 10 villes ($n = 10$) :
  Nombre de circuits $= 181\,440 \approx 2.10^6$.
  Temps d'évaluation $= 0.5$ millièmes de seconde.
- Pour 30 villes ($n = 30$) :
  Nombre de circuits $\approx 44.10^{29}$

  $$\begin{aligned}\text{Temps d'évaluation} \quad &\approx 1.10^{21} \text{ secondes}\\ &\approx 13.10^{15} \text{ jours}\\ &\approx 35\,000 \text{ milliards d'années}\end{aligned}$$

L'énumération devient vite impossible.

Circuit optimal pour l'instance avec ≈50K pubs



Temps pour optenir la solution : 250 ans
La solution optimale pour les instances avec 100 clients : 0.22 secondes

2 PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE

Reformulations et algorithmes pour des programmes linéaires en nombres entiers

Intérêt et enjeux de la programmation mathématique

On s'intéresse à des problèmes NP-difficiles.

La programmation mathématique fournit :

- un formalisme de modélisation
- une méthode générique de résolution

Les enjeux :

- trouver la bonne modélisation pour un problème donné **(formulation)**
- trouver la meilleure manière d'entrer le problème pour une résolution efficace **(reformulation)**
- trouver de nouveaux algorithmes génériques pour résoudre des problèmes de plus en plus difficiles **(algorithmique)**

Programmation linéaire

Un programme linéaire avec n variables $x_1, \ldots, x_n$ et m contraintes s'écrit de la manière suivante.

$$
\begin{array}{rc}
\text{max} & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\
\text{sous les contraintes} & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j, (j = 1, \ldots, m) \\
 & x_i \in \mathbb{R}, (i = 1, \ldots, n)
\end{array}
$$

- **Linéarité :** Objectif et contraintes sont des fonctions linéaires des variables de décision (les c_i et a_{ij} sont des constantes)
- **Continuité :** Les variables peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle respectant les contraintes linaires

$\Longrightarrow$ on sait résoudre de très grands programmes linéaires de manière efficace

Programmation linéaire en nombres entiers

Un programme linéaire en variables entières (PLNE) avec n variables $x_1, \ldots, x_n$ et m contraintes s'écrit de la manière suivante.

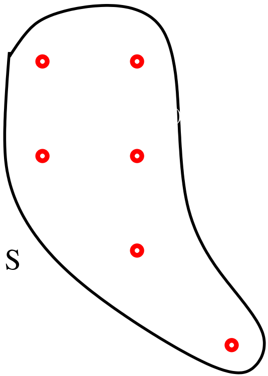
$$\begin{array}{rc} \max & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{sous les contraintes} & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j, (j = 1, \ldots, m) \\ & x_i \in \mathbb{Z}, (i = 1, \ldots, n) \end{array}$$

- Difficile à résoudre
- Méthodes génériques à base d'énumération et d'approximations par des PL

$\Longrightarrow$ on sait résoudre des PLNE de taille moyenne de manière efficace

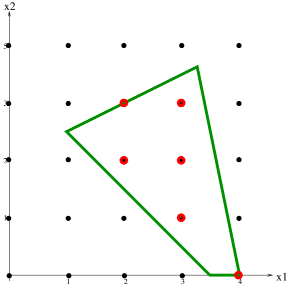
Programmation mathématique

$\min\{c(s) : s \in \mathbf{S}\}$



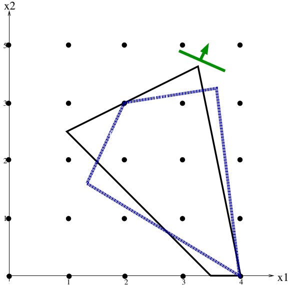
Les vrais problèmes.

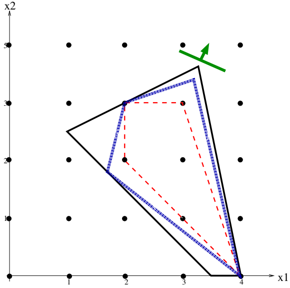
$\min\{cx : x \in \mathbf{P_I} = \mathbf{P} \cap \mathbb{N}^{\mathbf{n}}\}$



Ce qu'on sait bien résoudre.

Premier enjeu : qualité de la formulation

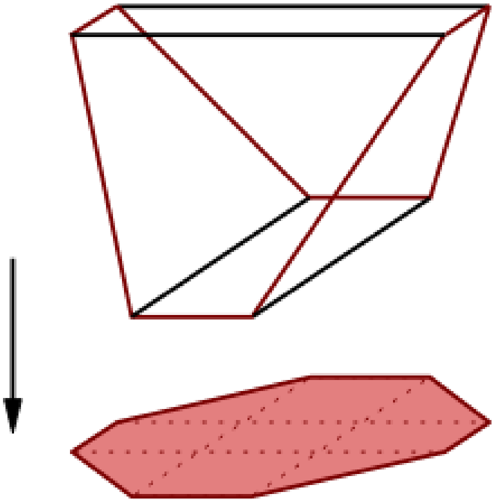




On cherche à approcher la **formulation linéaire idéale** (l'enveloppe convexe des solutions réalisables).

Le nombre des inégalités qui décrivent l'enveloppe convexe est exponentielle ⇒ impossible de l'obtenir en pratique.

Formulations de très grande taille



Reformulation

- Pour avoir une meilleure approximation de l'enveloppe convexe, on monte en dimension
- On utilise des variables plus agrégées (des morceaux plus grands des solutions)
- Exemples :
  - Chemins à lieu d'arcs
  - Sous-ensembles à lieu d'éléments individuelles
- On peux intégrer des contraintes dans la définition des variables
- Le nombre des variables agrégées est beaucoup plus important, par contre le nombre des contraintes est moins important

Exemple de reformulation

Theorem (Minkowski)

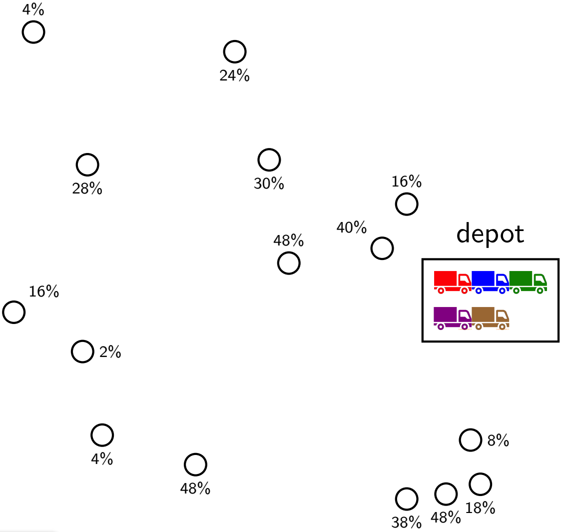
Si $P = \{x \geq 0 : Ax \geq b\} \neq \emptyset$ *et rang*$(A) = n$*, alors*

$$P = \{x = \sum_{t=1}^{T} \lambda_t x^t + \sum_{s=1}^{S} \mu_s r^s \quad \text{tel que} \sum_{t=1}^{T} \lambda_t = 1,\ \lambda_t \geq 0\,\forall t,\ \mu_s \geq 0\,\forall s\},$$

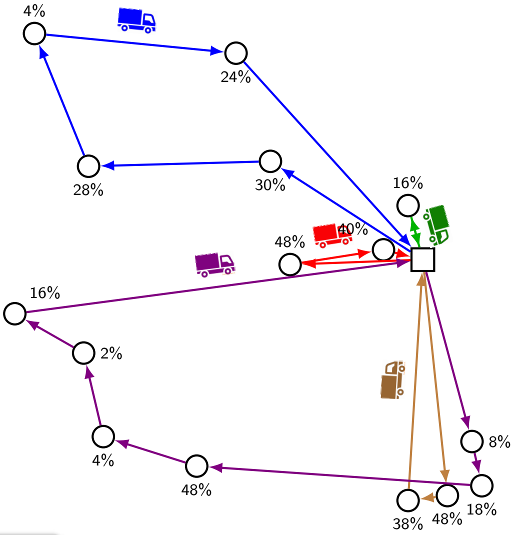
où $\{x^1, \ldots, x^T\}$ *est l'ensemble des points extrêmes de* P *et* $\{r^1, \ldots, r^S\}$ *est l'ensemble des rayons extrêmes de* P*.*

Tout polyèdre peut être reformulé comme une combinaison linéaire de ses rayons extrêmes et une combinaison convexe de ses points extrêmes.

Problème classique du routage de véhicules



Problème classique du routage de véhicules



Une variable binaire par route réalisable (la somme des demandes des clients servis ne dépasse pas la capacité).

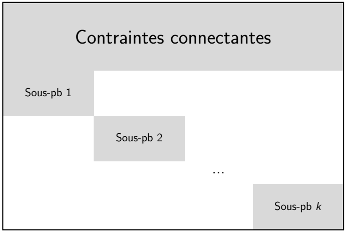
Minimiser la distance parcourue totale tel que

- chaque client est servi
- et le nombre des routes ne dépasse pas le nombre des véhicule disponibles

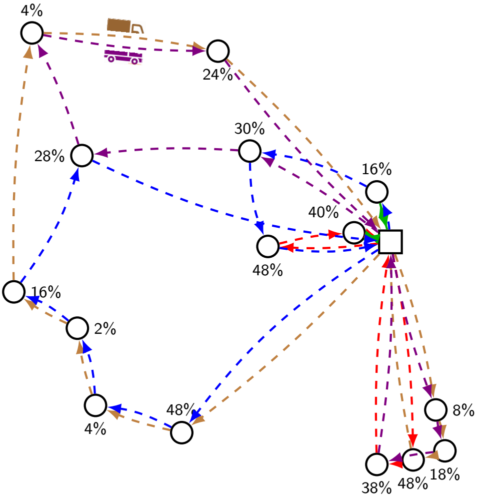
Deuxième enjeu : traiter des modèles de très grande taille

- Les bonnes formulations sont souvent de très grande taille.
- Les algorithmes classiques peuvent mettre un temps trop important pour les résoudre.

- Méthodologie utilisée : la décomposition.
- "Diviser pour régner"
- Sous-problème : génère des "morceaux" de solutions
- Problème maître : assembler les morceaux pour créer une solution complète



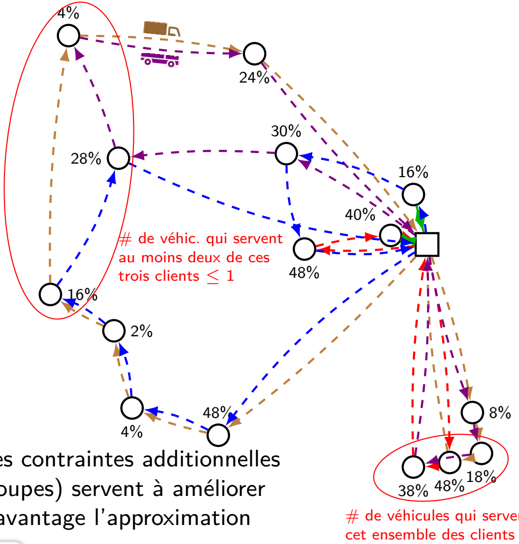
Relaxation linéaire du problème du routage des véhicules



Une variable continue par route réalisable.

Les variables améliorantes sont générées par le sous-problème, qui est le problème du plus court chemin avec les contraintes de ressources.

Relaxation linéaire du problème du routage des véhicules



Une variable continue par route réalisable.

Les variables améliorantes sont générées par le sous-problème, qui est le problème du plus court chemin avec les contraintes de ressources.

Des contraintes additionnelles (coupes) servent à améliorer d'avantage l'approximation

4

OPTIMISER LES LIVRAISONS EN VILLE

Principaux défis auxquels nous faisons face.

Transition énergétique

Les transports sont responsables de 25% des émissions de gaz à effet de serre.

Avec le développement du e-commerce, de nombreux véhicules sont employés

On a besoin de réinventer les manières de fonctionner, notamment en ville

Les modèles d'optimisation doivent s'adapter à ces nouveaux usages

Livraison en ville

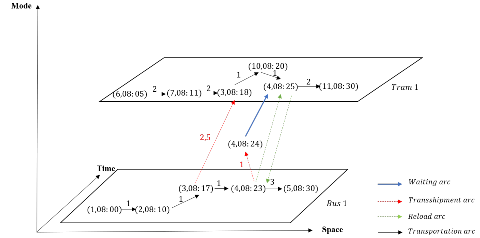
Les transports en commun forment une ressource sous-utilisée hors heures de pointe

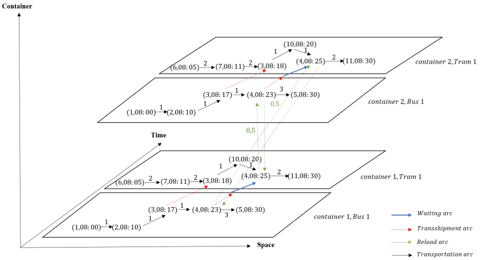
On cherche à exploiter la capacité non utilisée dans les tramways, bus

Installation de containers dans les rames

Problèmes d'optimisation plus complexes

Des réseaux de réseaux





Modèles mathématiques

Les modèles mathématiques obtenus sont de taille considérable.

Des recherches sont menées actuellement pour lever les difficultés de résolution en pratique

- reformulations
- techniques de génération dynamique de formulation
- prétraitements, règles de dominances
- amélioration de la performance des algorithmes

MERCI

realopt.bordeaux.inria.fr