Fractales et Dynamique Holomorphe

Jasmin Raissy

Institut de Mathématiques de Bordeaux & IUF

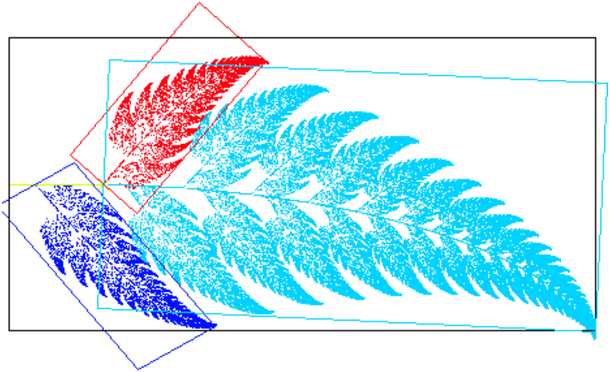
Soirée IMB-UFMI
de présentation des masters et de la recherche

18 octobre 2022

Fractales

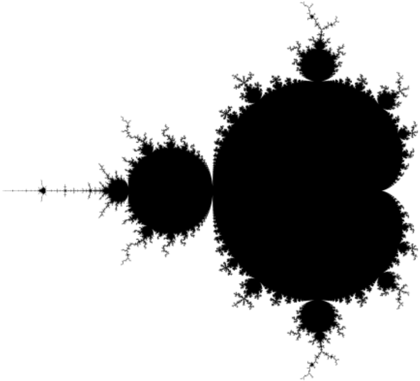
Fractales

Fractales



Fougère de Barnsley : image fractale de type IFS (Iterated Function System).

Fractales



L’ensemble de Mandelbrot.

Suites recurrentes de nombres complexes

$$\begin{cases} z_{n+1} = f(z_n) \\ z_0 \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Suites recurrentes de nombres complexes

$$\begin{cases} z_{n+1} = f(z_n) \\ z_0 \in \mathbb{C} \end{cases}$$

But : décrire l'ensemble des valeurs d'adhérence ω de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Suites recurrentes de nombres complexes

$$\begin{cases} z_{n+1} = f(z_n) \\ z_0 \in \mathbb{C} \end{cases}$$

But : décrire l'ensemble des valeurs d'adhérence ω de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- *f* linéaire : $f(z) = az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

Suites recurrentes de nombres complexes

$$\begin{cases} z_{n+1} = f(z_n) \\ z_0 \in \mathbb{C} \end{cases}$$

But : décrire l'ensemble des valeurs d'adhérence ω de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- f linéaire : $f(z) = az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.
  - si $|a| \neq 1$ ou si $a = 1$ et $b \neq 0$, alors on a une seule valeur d'adhérence dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
  - sinon l'ensemble ω dépende de z_0 et est fini ou le cercle euclidien $\mathbb{S}^1$.

Suites recurrentes de nombres complexes

- f quadratique ?

Suites recurrentes de nombres complexes

- f quadratique ?
  - $f(z) = z^2$

Suites recurrentes de nombres complexes

- *f quadratique ?*
  - $f(z) = z^2$
    - si $|z_0| < 1$, alors $z_n \to 0$;
    - si $|z_0| > 1$, alors $|z_n| \to +\infty$;
    - si $|z_0| = 1$, alors $|z_n| = 1$ et l'ensemble ω peut être égal à $\mathbb{S}^1$ ou être fini de cardinalité arbitraire.

Suites recurrentes de nombres complexes

- f quadratique ?
  - $f(z) = z^2$
    - si $|z_0| < 1$, alors $z_n \to 0$;
    - si $|z_0| > 1$, alors $|z_n| \to +\infty$;
    - si $|z_0| = 1$, alors $|z_n| = 1$ et l'ensemble ω peut être égal à $\mathbb{S}^1$ ou être fini de cardinalité arbitraire.

Question

Comment l'ensemble des valeurs d'adhérence ω de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépende-t-il de z_0 ?

Suites recurrentes de nombres complexes

- *f* quadratique ?
  - $f(z) = z^2$
    - si $|z_0| < 1$, alors $z_n \to 0$;
    - si $|z_0| > 1$, alors $|z_n| \to +\infty$;
    - si $|z_0| = 1$, alors $|z_n| = 1$ et l'ensemble ω peut être égal à $\mathbb{S}^1$ ou être fini de cardinalité arbitraire.

Question

Comment l'ensemble des valeurs d'adhérence ω de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépende-t-il de z_0 ?

Ensemble de Julia de f : $\mathscr{J}(f)$, points z_0 où le système est sensible aux conditions initiales.

Ensemble de Fatou de f : $\mathscr{F}(f)$, le complémentaire de $\mathscr{J}(f)$.

Polynômes quadratiques et ensemble de Mandelbrot

- $P_c(z) = z^2 + c$, avec $c \in \mathbb{C}$

Polynômes quadratiques et ensemble de Mandelbrot

- $P_c(z) = z^2 + c$, avec $c \in \mathbb{C}$
  - si $|z_0| > 1 + |c|$, alors $|z_n| \to +\infty$;

Polynômes quadratiques et ensemble de Mandelbrot

- $P_c(z) = z^2 + c$, avec $c \in \mathbb{C}$
  - si $|z_0| > 1 + |c|$, alors $|z_n| \to +\infty$;
  - si $|z_0| \leq 1 + |c|$?

Polynômes quadratiques et ensemble de Mandelbrot

- $P_c(z) = z^2 + c$, avec $c \in \mathbb{C}$
  - si $|z_0| > 1 + |c|$, alors $|z_n| \to +\infty$;
  - si $|z_0| \leq 1 + |c|$?

Théorème

Soit $(z_n)_{n\geq 0}$ la suite avec $z_0 = c$.

$$(z_n)_{n\geq 0} \text{ est bornée} \iff \mathscr{J}(P_c) \text{ est connexe}$$
$$(z_n)_{n\geq 0} \text{ non bornée} \implies \mathscr{J}(P_c) \text{ est un Cantor}$$

Polynômes quadratiques et ensemble de Mandelbrot

- $P_c(z) = z^2 + c$, avec $c \in \mathbb{C}$
  - si $|z_0| > 1 + |c|$, alors $|z_n| \to +\infty$;
  - si $|z_0| \leq 1 + |c|$?

Théorème

Soit $(z_n)_{n\geq 0}$ la suite avec $z_0 = c$.

$$(z_n)_{n\geq 0} \text{ est bornée } \iff \mathscr{J}(P_c) \text{ est connexe}$$
$$(z_n)_{n\geq 0} \text{ non bornée } \Longrightarrow \mathscr{J}(P_c) \text{ est un Cantor}$$

L'ensemble de Mandelbrot est l'ensemble

$$\mathscr{M} = \{c \in \mathbb{C} : \text{ la suite } (z_n)_{n\geq 0} \text{ avec } z_0 = c \text{ est bornée}\}$$

$P_c(z) = z^2 + c$ et l'ensemble de Mandelbrot

Question

Quand l'ensemble ω_c de $(z_n)_{n\geq 0}$ avec $z_0 = 0$ est-il fini ?

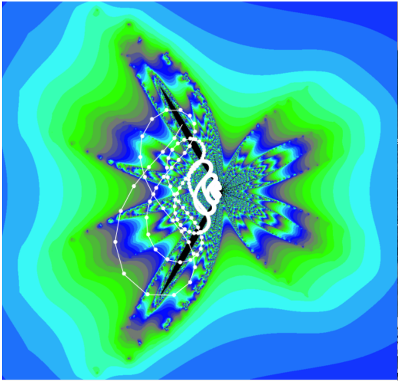
$P_c(z) = z^2 + c$ et l'ensemble de Mandelbrot

Question

Quand l'ensemble ω_c de $(z_n)_{n\geq 0}$ avec $z_0 = 0$ est-il fini ?

Conjecture

L'ensemble de Mandelbrot est localement connexe.



Merci pour votre attention !