

Transport optimal de sable avec une pelle et un seau, terrain de jeu pour les mathématiques et l'intelligence artificielle

Paul Freulon

Institut de Mathématiques de Bordeaux
Université de Bordeaux

Soirée de présentation masters et recherche à l'IMB

Octobre 2022

- 1 Le transport optimal un vieux problème très actuel !
- 2 Un problème d'allocation de ressources
- 3 Transport optimal et distance de Wassertein
- 4 Illustration avec arrivée de données en ligne
- 5 Transport optimal pour l'intelligence artificielle ?

Bref aperçu du problème de transport optimal



Question introduite par Gaspard Monge¹ en 1781 dans

Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais

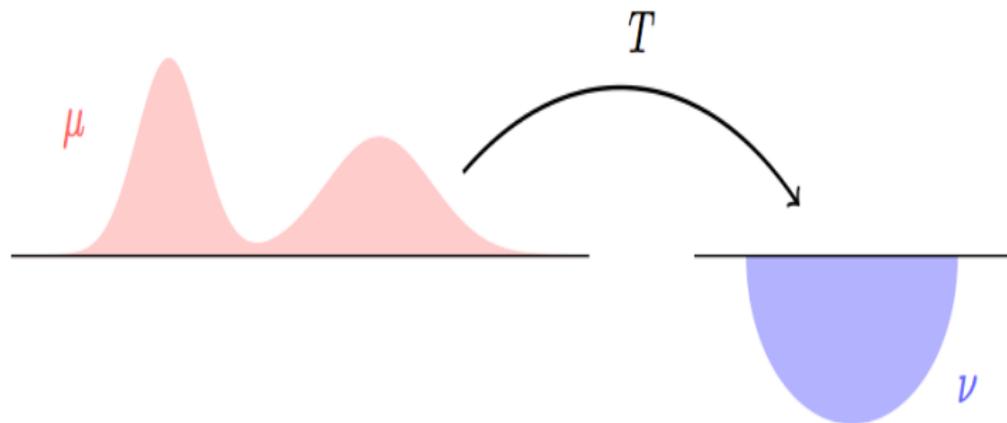
pour un problème de transfert de masses :

Comment trouver le moyen le plus efficace (à moindre coût) pour transporter un tas de sable (à l'aide d'une pelle et d'un seau...) dans un trou de même volume ?

1. https://fr.wikipedia.org/wiki/Gaspard_Monge

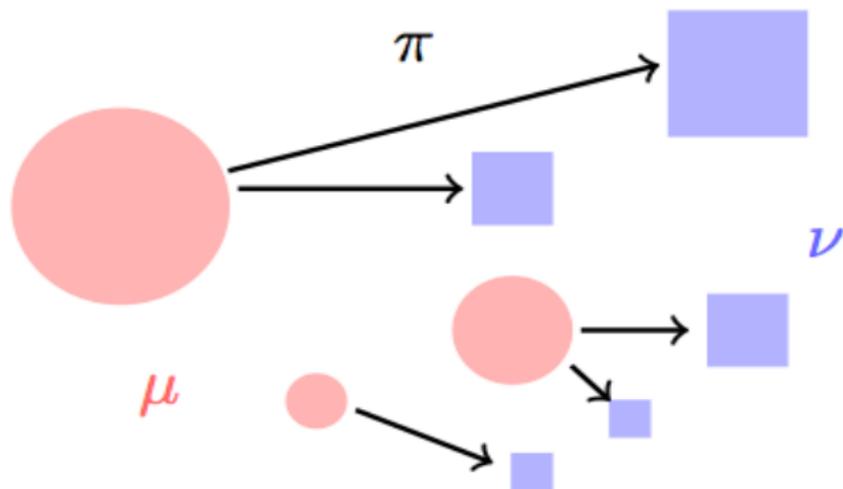
Bref aperçu du problème de transport optimal ¹

Formulation mathématique moderne : trouver une application $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ pour transférer une loi de probabilité μ (répartie sur un support \mathcal{X}) vers une loi de probabilité ν (répartie sur un support \mathcal{Y})



Bref aperçu du problème de transport optimal ¹

Formulation mathématique moderne : trouver un transfert de la loi de probabilité μ (répartie sur un support \mathcal{X}) vers une loi de probabilité ν (répartie sur un support \mathcal{Y}) par un plan de transport $\pi : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow [0, 1]$



Un fabuleux terrain d'investigation pour les mathématiques ¹...

Monge



Kantorovich



Dantzig



Brenier



Otto



McCann



Villani



Crédit : Gabriel Peyré (CNRS & ENS Paris)

1. Villani, C. (2003) Topics in optimal transportation

... pour de très nombreuses applications ¹ !

- économie (ex : gestion de stock)
- physique
- biostatistiques
- traitement d'images
- apprentissage automatique (machine learning)
- ...

1. Cuturi & Peyré (2018) <https://optimaltransport.github.io/>

- 1 Le transport optimal un vieux problème très actuel !
- 2 Un problème d'allocation de ressources**
- 3 Transport optimal et distance de Wassertein
- 4 Illustration avec arrivée de données en ligne
- 5 Transport optimal pour l'intelligence artificielle ?

Optimiser la livraison des pizzas ?

Données disponibles ¹ :

- positions de pizzerias à Chicago
- positions des domiciles des clients qui passent commande

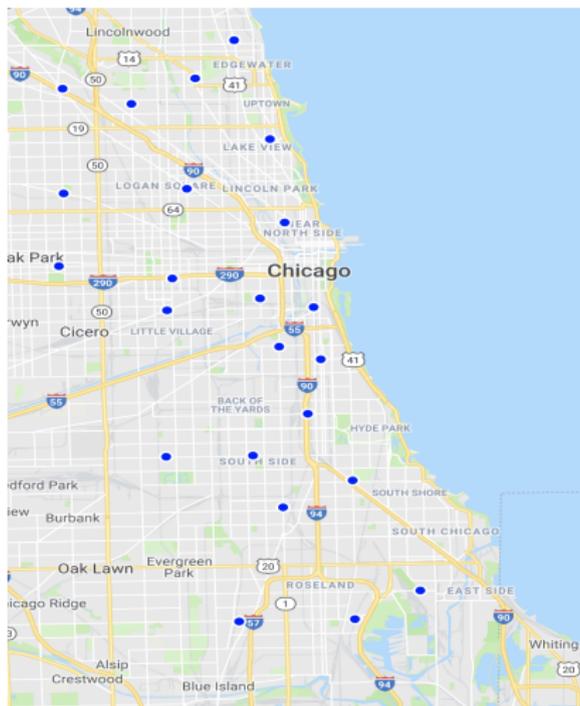
Questions (d'intérêt ?) :

- étant donné le lieu d'une commande, quelle pizzeria devrait faire la livraison ?
- comment faire évoluer la réponse au fur et à mesure de l'arrivée des commandes ?

1. Open Data de la ville de Chicago : <https://data.cityofchicago.org>

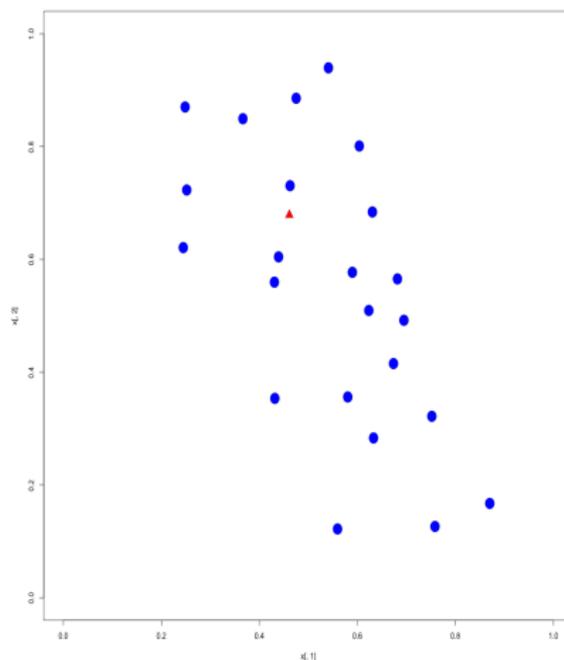
Optimiser la livraison des pizzas ?

Position des pizzerias à Chicago



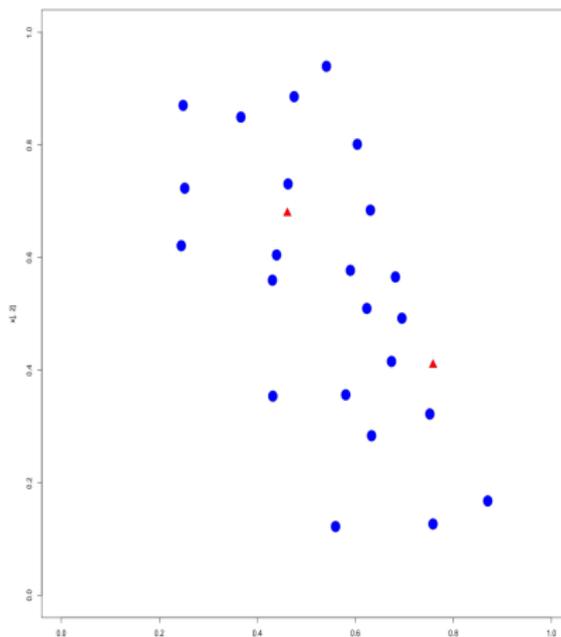
Optimiser la livraison des pizzas ?

Position X_1 de la **première** commande enregistrée à Chicago en 2014



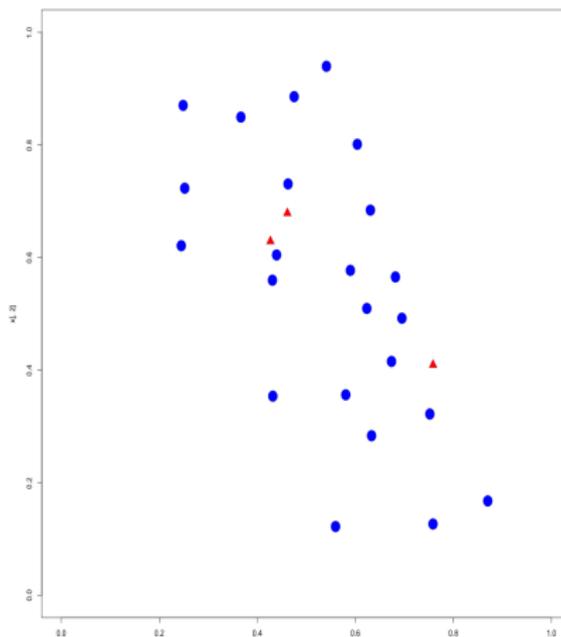
Optimiser la livraison des pizzas ?

Positions X_1, X_2 des commandes enregistrées à Chicago par **ordre chronologique**



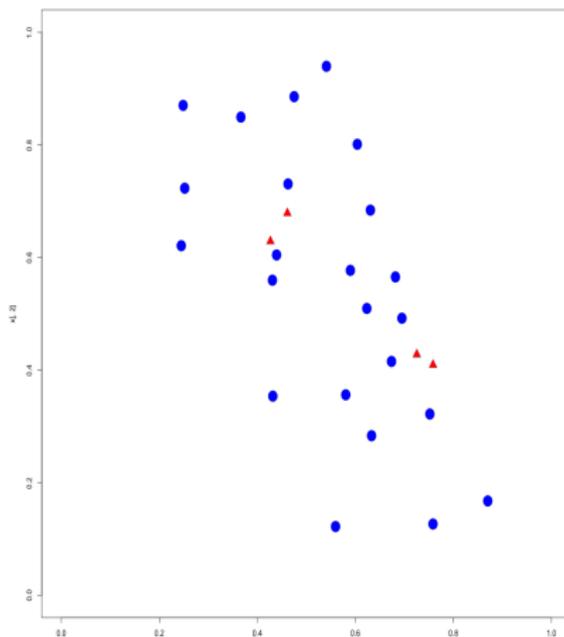
Optimiser la livraison des pizzas ?

Positions X_1, X_2, X_3 des commandes enregistrées à Chicago par **ordre chronologique**



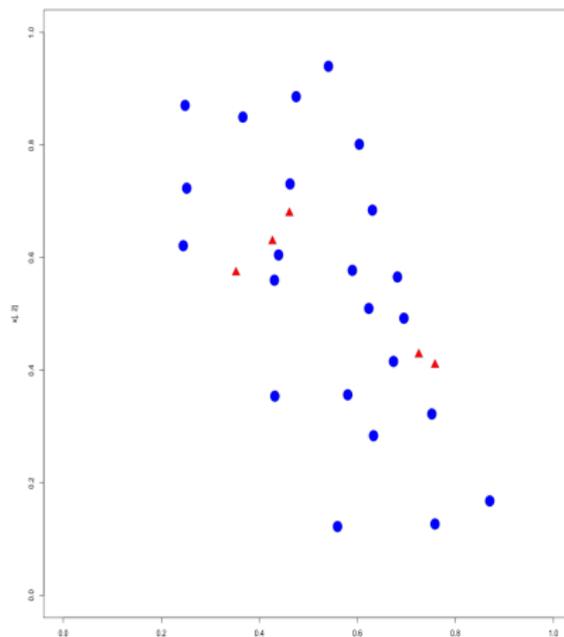
Optimiser la livraison des pizzas ?

Positions X_1, \dots, X_4 des commandes enregistrées à Chicago par **ordre chronologique**



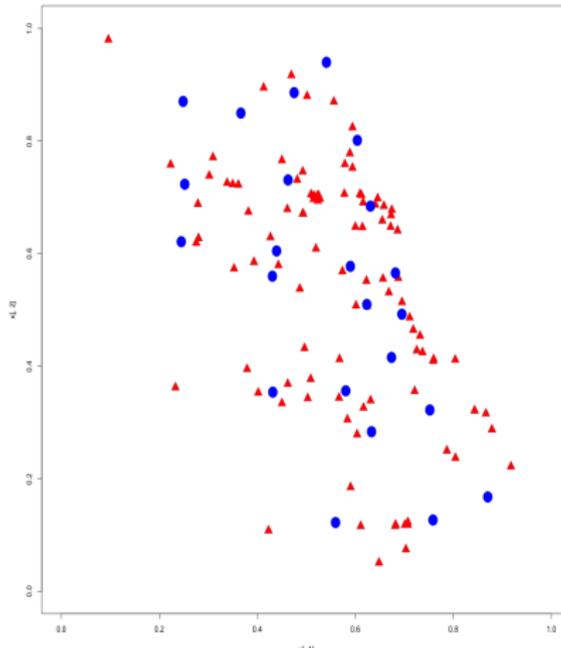
Optimiser la livraison des pizzas ?

Positions X_1, \dots, X_5 des commandes enregistrées à Chicago par **ordre chronologique**



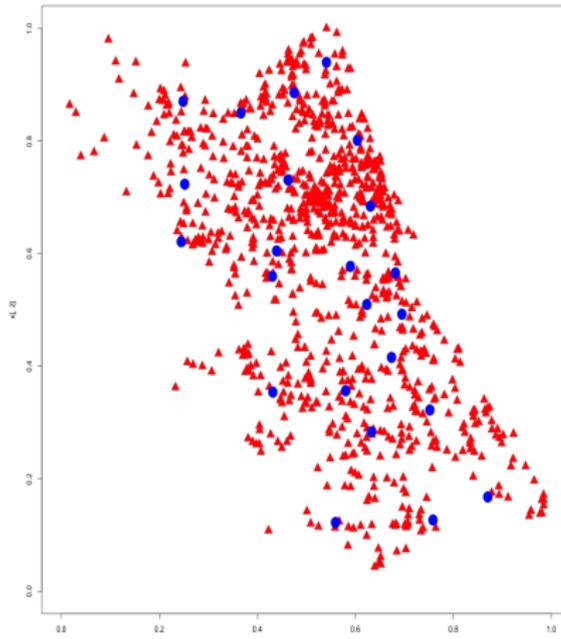
Optimiser la livraison des pizzas ?

Positions des commandes enregistrées à Chicago par **ordre chronologique** (100 premières)



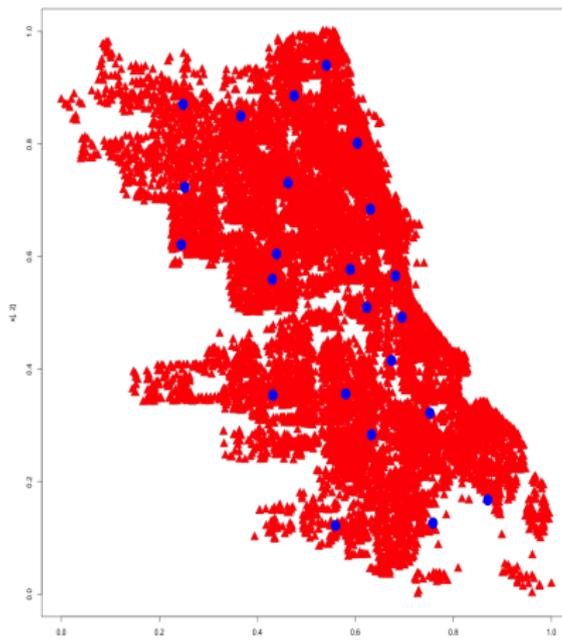
Optimiser la livraison des pizzas ?

Positions des commandes enregistrées à Chicago par **ordre chronologique** (1000 premières)



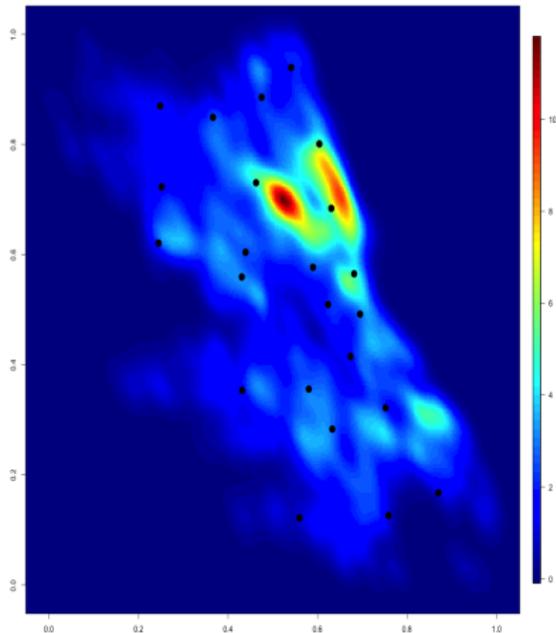
Optimiser la livraison des pizzas ?

Positions X_1, \dots, X_N des commandes enregistrées à Chicago par **ordre chronologique** (total $N = 16104$)



Optimiser la livraison des pizzas ?

Carte de chaleur (densité) des positions des commandes enregistrées à Chicago en 2014



- 1 Le transport optimal un vieux problème très actuel !
- 2 Un problème d'allocation de ressources
- 3 Transport optimal et distance de Wassertein**
- 4 Illustration avec arrivée de données en ligne
- 5 Transport optimal pour l'intelligence artificielle ?

Approche statistique de l'allocation de ressources ¹

Hypothèses de modélisation :

- positions des lieux de commande : une suite de variables aléatoires

$$X_1, \dots, X_n$$

indépendantes et identiquement distribuées, échantillonnées à partir d'une loi de probabilité **inconnue** μ de support $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$

- positions des pizzerias : une loi de probabilité **connue et discrète**

$$\nu = \sum_{j=1}^J \nu_j \delta_{y_j}$$

1. Berçu, B. & Bigot, J. (2018) ArXiv :1812.09150

Approche statistique de l'allocation de ressources

Problème : trouver une application

$$T : \mathcal{X} \rightarrow \{y_1, \dots, y_J\}$$

qui "envoie" la loi de probabilité μ sur la loi de probabilité

$\nu = \sum_{j=1}^J \nu_j \delta_{y_j}$ de **façon optimale** par rapport au coût de transport

$$c(x, y) = \|x - y\|_{\ell_2} = \left(\sum_{k=1}^d (x_k - y_k)^2 \right)^{1/2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d \text{ (ici } d = 2)$$

Transport optimal entre lois de probabilité

Soit $T : \mathcal{X} \rightarrow \{y_1, \dots, y_J\}$ tel que $T\#\mu = \nu$ (notation mathématique de T “envoie” μ sur ν)

Definition (Formulation de Monge)

Le transport optimal entre μ et ν correspond à résoudre le problème de minimisation suivant

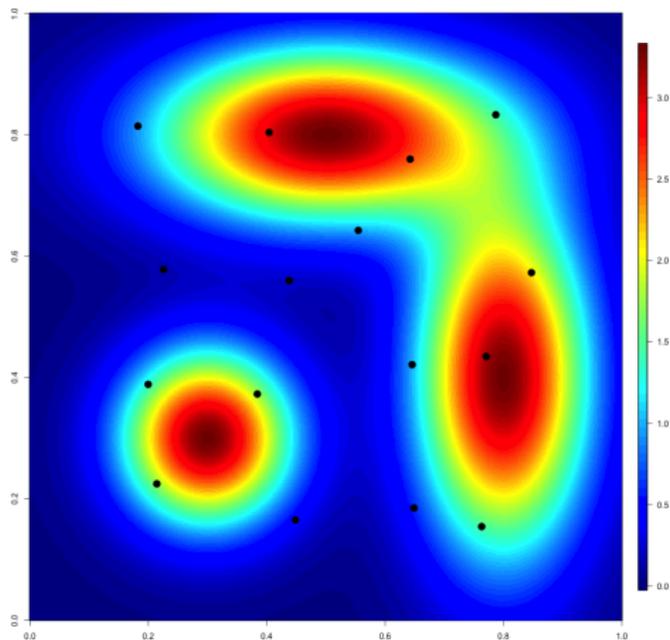
$$W_0(\mu, \nu) = \min_{T : T\#\mu = \nu} \int_{\mathcal{X}} c(x, T(x)) d\mu(x),$$

où $c(x, y)$ est le coût du transport d'une unité de matière de la position x à la position y .

Remarque : $W_0(\mu, \nu)$ peut s'interpréter comme une distance (dite de Wasserstein) entre μ et ν !

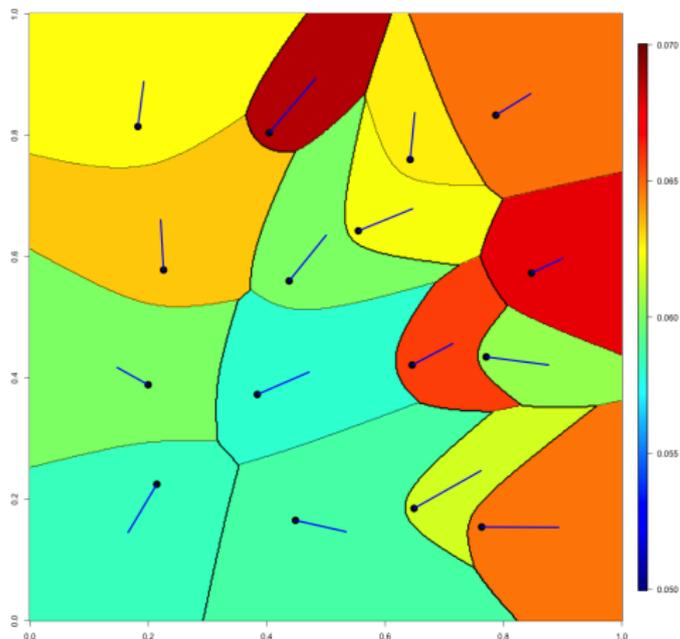
Transport optimal entre lois de probabilité

Transport optimal entre une loi de probabilité μ à densité vers une loi de probabilité discrète ν (points noirs)



Transport optimal entre des mesures de probabilités

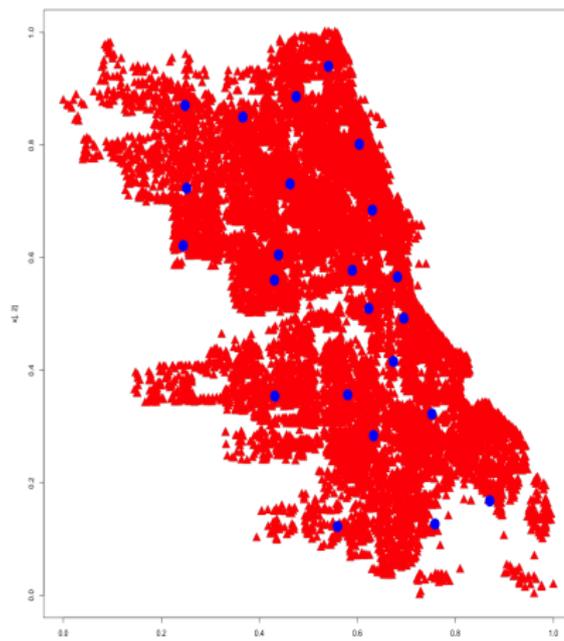
Transport optimal de μ à densité vers ν (points noirs) - Application optimale T pour le coût Euclidien $c(x, y) = \|x - y\|_{\ell_2}$



- 1 Le transport optimal un vieux problème très actuel !
- 2 Un problème d'allocation de ressources
- 3 Transport optimal et distance de Wassertein
- 4 Illustration avec arrivée de données en ligne**
- 5 Transport optimal pour l'intelligence artificielle ?

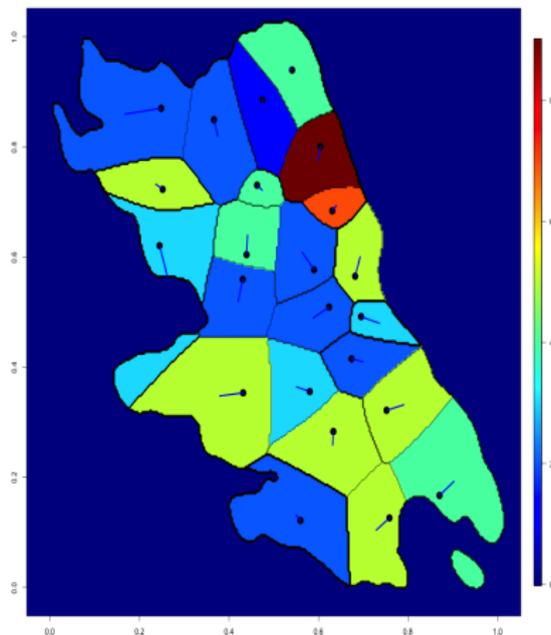
Détermination du secteur de livraison des pizzerias

Positions X_1, \dots, X_N des commandes enregistrées à Chicago par **ordre chronologique** (total $N = 16104$)



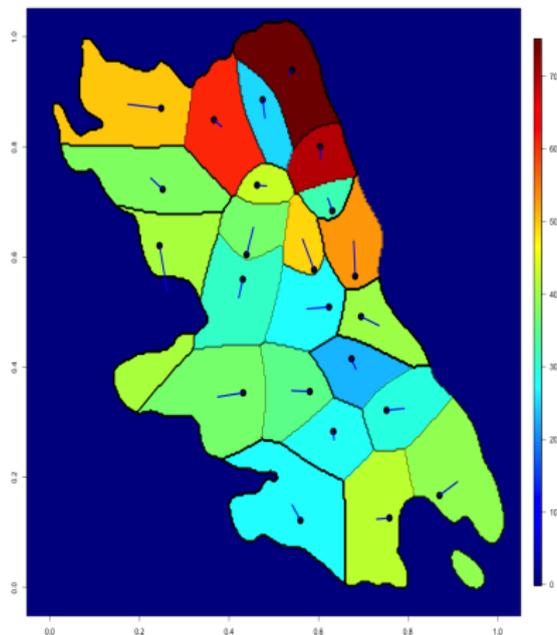
Détermination du secteur de livraison des pizzerias

Application optimale T pour le coût Euclidien $c(x, y) = \|x - y\|_{\ell_2}$ après $n = 100$ itérations et $\varepsilon = 0.005$



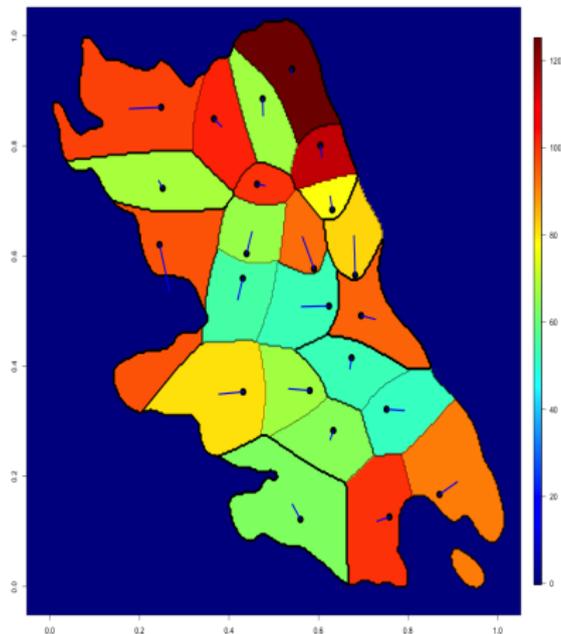
Détermination du secteur de livraison des pizzerias

Application optimale T pour le coût Euclidien $c(x, y) = \|x - y\|_{\ell_2}$ après $n = 1000$ itérations et $\varepsilon = 0.005$



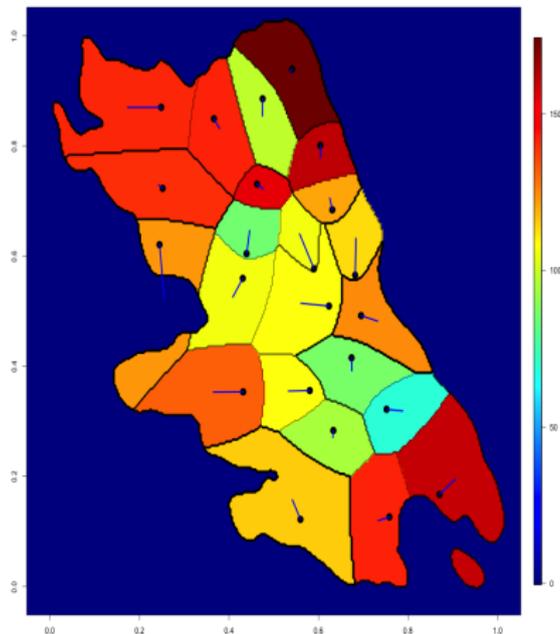
Détermination du secteur de livraison des pizzerias

Application optimale T pour le coût Euclidien $c(x, y) = \|x - y\|_{\ell_2}$ après $n = 2000$ itérations et $\varepsilon = 0.005$



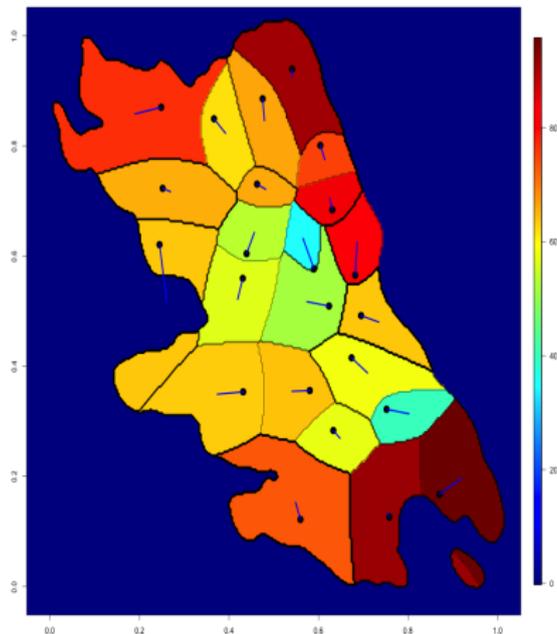
Détermination du secteur de livraison des pizzerias

Application optimale T pour le coût Euclidien $c(x, y) = \|x - y\|_{\ell_2}$ après $n = 3000$ itérations et $\varepsilon = 0.005$



Détermination du secteur de livraison des pizzerias

Application optimale T pour le coût Euclidien $c(x, y) = \|x - y\|_{\ell_2}$ après
 $N = 16104$ itérations et $\varepsilon = 0.005$



- 1 Le transport optimal un vieux problème très actuel !
- 2 Un problème d'allocation de ressources
- 3 Transport optimal et distance de Wassertein
- 4 Illustration avec arrivée de données en ligne
- 5 Transport optimal pour l'intelligence artificielle ?

Intelligence artificielle et génération d'images

Base de données d'images de célébrités : **CelebA Dataset**¹



1. <http://mmlab.ie.cuhk.edu.hk/projects/CelebA.html>

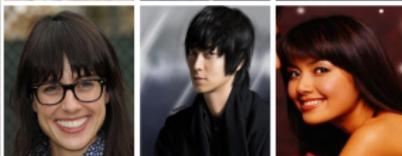
Intelligence artificielle et génération d'images

Question : peut-on apprendre la distribution (mesure de probabilité) de cet ensemble de visages et en générer aléatoirement de nouveaux ?

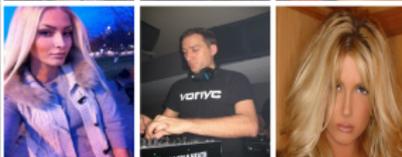
Eyeglasses



Bangs



Pointy Nose



Oval Face



Wearing Hat



Wavy Hair



Mustache



Smiling



Intelligence artificielle et génération d'images

Réponse : solution proposée par des chercheurs de la société Nvidia ¹ qui s'appuie en partie sur le transport optimal !



1. https://research.nvidia.com/publication/2017-10_Progressive-Growing-of

Intelligence artificielle et génération d'images

Question : quelles sont les vraies images et celles générées aléatoirement ¹ ?



1. https://research.nvidia.com/publication/2017-10_Progressive-Growing-of

Intelligence artificielle et génération d'images

Réponse - 1ère ligne : génération aléatoire et lignes 2 à 5 : vraies images (les plus proches de l'image générée) ¹ ?



1. https://research.nvidia.com/publication/2017-10_Progressive-Growing-of