Devoir Maison

à rendre le 12 octobre 2022

Exercice 1

Pour $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$F_{a,b} = \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv a \mod b\}.$$

1. Pour $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ et $b_1, b_2 \in \mathbb{N}^*$ montrer que $F_{a_1,b_1} \cap F_{a_2,b_2} = \bigcup_{s \in F_{a_1,b_1} \cap F_{a_2,b_2}} F_{s,b_1 b_2}$.
2. Sur $\mathbb{Z}$ on introduit la topologie suivante : une partie $U \subseteq \mathbb{Z}$ est ouverte si elle est vide ou bien union quelconque d'ensembles de la forme $F_{a,b}$ (avec, comme avant, $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$). Démontrer que ceci définit une topologie sur $\mathbb{Z}$. On utilisera cette topologie pour le reste de l'exercice.
3. Pour $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ identifier
$$\left(\bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b} \right)^{\complement}$$
puis décider si les parties $F_{a,b}$ sont des fermés de $\mathbb{Z}$.
4. Identifier la partie $\bigcup_{p \text{ premier}} F_{0,p}$ de $\mathbb{Z}$.
5. Avec un raisonnement topologique, en déduire par l'absurde que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Rappel : Etant donné un espace topologique X et un ensemble $A \subset X$, un *point isolé* de A est un point $x \in A$ admettant un voisinage V dont l'intersection avec A est réduite à x. Un *point d'accumulation* de A est un point $x \in X$ dont tout voisinage intersecte $A \setminus \{x\}$.

Exercice 2

Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle.

1. Trouver les intérieurs et adhérences des ensembles suivants. Lesquels sont ouverts ? fermés ? (a) $\mathbb{R}$ (b) $]0,1[\cup]1,3[$; (c)$[0,3[$; (d) $\{6\}$; (e) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$.

2. Soit $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup]1,2[\cup]2,3[\cup \{4\} \cup (\mathbb{Q} \cap]7,8])$. Déterminer les points isolés et les points d'accumulation de l'ensemble A. Déterminer

$$\mathring{A}, \quad \overline{\mathring{A}}, \quad \mathring{\overline{\mathring{A}}} \text{ puis } \overline{A}, \quad \mathring{\overline{A}}, \quad \overline{\mathring{\overline{A}}}.$$

Soit maintenant X un espace topologique quelconque et soit A une partie de X.

3. Montrer que les applications « intérieur » et « adhérence » de $\mathcal{P}(X)$ vers $\mathcal{P}(X)$ sont idempotentes (c'est-à-dire vérifient $f \circ f = f$).

4. Prouver qu'en itérant « intérieur » et « adhérence », on obtient à partir de A au plus 7 parties distinctes. Les ordonner. Donner un exemple où elles sont toutes distinctes [on pourra prendre $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle].

Exercice 3

Soient X un espace topologique et A et B des parties de X. Montrer que $\partial(A)$ contient $\partial(\mathring{A})$. Que peut-on dire de $\partial(A \cup B)$ d'un côté et de $\partial(A)$ et $\partial(B)$ de l'autre ?