Un lemme matriciel effectif

Pascal Autissier

3 février 2012

Abstract : We show an almost optimal effective version of Masser's matrix lemma [11], giving a lower bound of the height of an abelian variety in terms of its period lattices.

Résumé : On donne ici une version effective presque optimale du lemme matriciel de Masser, qui consiste à minorer la hauteur d'une variété abélienne en fonction de ses réseaux des périodes.

2010 Mathematics Subject Classification : 14G40, 11G10.

1 Introduction

Soit K un corps de nombres. Désignons par G_K l'ensemble des plongements σ de K dans $\mathbb{C}$. Masser a montré dans [11] une minoration, connue sous le nom de lemme matriciel, de la hauteur d'une variété abélienne A sur K en termes de matrices des périodes des A_σ. Ce résultat est l'un des ingrédients utilisés par Masser et Wüstholz [12] pour prouver leur fameux théorème des périodes.

Bost [2] a revisité ce lemme matriciel en minorant la hauteur de Faltings (stable), notée $h_{\mathrm{Fa}}(A)$, de A en fonction des diamètres d'injectivité des A_σ (*cf.* section 2 pour les définitions précises). Graftieaux [8], David-Philippon [4] et Gaudron [6] en ont ensuite donné des versions effectives ; *cf.* remarque 1.3 ci-dessous.

On se propose ici de raffiner ces versions de manière asymptotiquement optimale. Introduisons d'abord quelques notations :

Dans tout la suite, on désigne par κ_1 la constante $\kappa_1 = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2\pi^3 e}{3}$. Lorsque $(A;L)$ est une variété abélienne complexe principalement polarisée, on note $\rho(A;L)$ son diamètre d'injectivité (*i.e.* le premier minimum de son réseau des périodes).

Théorème 1.1 : *Soit $(A;L)$ une K-variété abélienne de dimension $g \geq 1$, principalement polarisée. En posant $\rho_\sigma = \min\Big(\rho(A_\sigma;L_\sigma);\sqrt{\dfrac{\pi}{3g}}\Big)$ pour tout $\sigma \in G_K$, on a alors l'inégalité suivante :*

$$h_{\mathrm{Fa}}(A) + \kappa_1 g \geq \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma\in G_K}\left(\frac{\pi}{6\rho_\sigma^2} + g\ln(\rho_\sigma\sqrt{g})\right) \quad .$$

Ce résultat est utilisé par Gaudron et Rémond [7] pour donner de nouvelles versions effectives du théorème des périodes.

Remarque 1.2 : La constante $\frac{\pi}{6}$ devant les $\frac{1}{\rho_\sigma^2}$ est optimale. En effet, fixons un corps de nombres K_0 et une K_0-variété abélienne $(A_0; L_0)$ de dimension $g-1$, principalement polarisée. Alors pour toute extension finie K de K_0 et toute K-courbe elliptique E à potentiellement bonne réduction partout, on a, en posant $A = A_{0K} \times E$, l'estimation

$$h_{\mathrm{Fa}}(A) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma \in G_K} \Big(\frac{\pi}{6\rho_\sigma^2} + \ln \rho_\sigma \Big) + O(1) \quad ,$$

où le $O(1)$ ne dépend que de $(g; K_0; A_0; L_0)$ (mais pas de $(K; E)$). On le voit en appliquant le théorème 7.b de [5].

Remarque 1.3 : À titre de comparaison, Graftieaux et Gaudron ont obtenu l'énoncé 1.1 avec, au lieu de ce $\frac{\pi}{6}$, une fonction $c(g)$ de g qui converge vers 0 (plus vite que $\frac{1}{g^g}$) lorsque g tend vers $+\infty$; David-Philippon ont trouvé une minoration de la forme $\frac{c_0}{g^4[K:\mathbb{Q}]} \max_{\sigma \in G_K} \frac{1}{\rho_\sigma^2}$, où la constante c_0 est absolue.

Enfin, citons pour mémoire la forme simplifiée (affaiblie mais plus maniable) suivante :

Corollaire 1.4 : *Soit $\varepsilon \in]0;1[$. Soit $(A; L)$ une K-variété abélienne de dimension $g \geq 1$, principalement polarisée. On a alors*

$$h_{\mathrm{Fa}}(A) + \frac{g}{2} \ln\Big(\frac{2\pi^2}{\varepsilon} \Big) \geq \frac{(1-\varepsilon)\pi}{6[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma \in G_K} \frac{1}{\rho(A_\sigma; L_\sigma)^2} \quad .$$

Démonstration : À partir du théorème 1.1, il suffit d'écrire $\ln u_\sigma \leq u_\sigma - 1$ avec $u_\sigma = \frac{\varepsilon\pi}{3g\rho_\sigma^2}$ pour tout $\sigma \in G_K$. $\square$

La section 2 donne les définitions et le théorème principal 2.1 (dont découle 1.1). Après des préliminaires sur les réseaux (section 3), on le prouve à la section 4.

Je remercie Éric Gaudron et Gaël Rémond de m'avoir incité à rédiger ce texte. Je remercie également le rapporteur pour ses suggestions qui m'ont permis d'en améliorer la présentation. Enfin, je remercie Fabien Pazuki pour d'intéressantes discussions concernant le lemme matriciel.

2 Minoration de hauteur

Définition : Soit A une variété abélienne complexe de dimension $g \geq 1$. Posons

$T_A = \Gamma(A;\Omega_{A/\mathbb{C}})^\vee$ et notons Γ_A le réseau des périodes de A (on a donc un isomorphisme $A(\mathbb{C}) \simeq T_A/\Gamma_A$ de groupes analytiques).

Soit $L : A \to A^\vee$ une polarisation de A. Sa classe de Chern induit une forme de Riemann H_L sur T_A (*i.e.* une forme hermitienne sur T_A telle que $\mathrm{Im}H_L(\gamma;\delta) \in \mathbb{Z}$ pour tout $(\gamma;\delta) \in \Gamma_A^2$, *cf.* lemme 2.4.5 de [1]). Le **diamètre d'injectivité** de L est le réel $\rho(A;L) = \min_{\gamma\in\Gamma_A-\{0\}} \sqrt{H_L(\gamma;\gamma)}$.

Définition : Soit $(A;L)$ une variété abélienne complexe principalement polarisée. Désignons par ν_1 la mesure de Haar sur $A(\mathbb{C})$ de masse 1.

Prenons un faisceau inversible $\mathcal{L}$ ample sur A définissant L (on a donc $h^0(A;\mathcal{L}) = 1$), une métrique du cube $\|\ \|$ sur $\mathcal{L}$ (*i.e.* une métrique sur L à courbure invariante par translations), et une section $s \in \Gamma(A;\mathcal{L}) - \{0\}$. On pose

$$I(A;L) = -\int_{A(\mathbb{C})} \ln\|s\|\mathrm{d}\nu_1 + \frac{1}{2}\ln\int_{A(\mathbb{C})} \|s\|^2\mathrm{d}\nu_1 \quad .$$

On vérifie facilement que ce réel ne dépend pas du choix de $(\mathcal{L};\|\ \|;s)$.

Voici le résultat principal de ce travail :

Théorème 2.1 : *Soit $(A;L)$ une $\mathbb{C}$-variété abélienne de dimension $g \geq 1$, principalement polarisée. Posons $\rho = \min\left(\rho(A;L)); \sqrt{\frac{\pi}{3g}}\right)$; on a alors l'inégalité*

$$I(A;L) \geq \frac{\pi}{12\rho^2} + \frac{g}{2}\ln\rho + \frac{g}{4}\ln\frac{3g}{\pi e} \quad .$$

Soit maintenant K un corps de nombres. Soit A une variété abélienne de dimension g sur K.

Définition : On définit la **hauteur de Faltings** $h_{\mathrm{Fa}}(A)$ de A de la manière suivante. Choisissons une extension finie K' de K telle que $A_{K'}$ soit semi-stable sur K'. Désignons par X le modèle de Néron de $A_{K'}$ sur $B = \mathrm{Spec}(O_{K'})$, par $0_X \in X(B)$ sa section neutre, et par ω_X le faisceau inversible $\omega_X = 0_X^*\Lambda^g\Omega_{X/B}$ sur B.

Munissons ω_X de la métrique $\|\ \|_{\mathrm{Fa}}$ telle que pour tout $\sigma \in B(\mathbb{C}) = G_{K'}$ et tout $\varphi \in \Gamma(B_\sigma;\omega_{X\sigma}) = \Gamma(A_\sigma;\Lambda^g\Omega_{A_\sigma/\mathbb{C}})$, on ait $\|\varphi\|^2_{\mathrm{Fa}}(\sigma) = \dfrac{i^{g^2}}{2^g}\displaystyle\int_{A_\sigma(\mathbb{C})} \varphi\wedge\overline{\varphi}$.

On pose alors $h_{\mathrm{Fa}}(A) = \dfrac{\widehat{\deg}(\omega_X;\|\ \|_{\mathrm{Fa}})}{[K':\mathbb{Q}]}$ (cela ne dépend pas du choix de K').

Le théorème 1.1 se déduit de l'énoncé 2.1 en utilisant l'inégalité de Bost suivante (*cf.* théorème §3 de [3]).

Théorème 2.2 (Bost) : *Soit $(A;L)$ une K-variété abélienne de dimension g, principalement polarisée. On a alors la minoration*

$$h_{\mathrm{Fa}}(A) \geq -\frac{g}{2}\ln(2\pi^2) + \frac{2}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma\in G_K} I(A_\sigma;L_\sigma) \quad .$$

Démonstration : Voir l'appendice de [7]. $\square$

3 Géométrie des nombres

Soit g un entier ≥ 1. On note $\mathbb{S}_g$ l'ensemble des matrices $Y \in \mathrm{M}_g(\mathbb{R})$ symétriques définies positives.

Définitions : Soit $Y \in \mathbb{S}_g$. Munissons $\mathbb{R}^g$ de la norme euclidienne $\| \ \|_Y$ telle que $\|x\|_Y^2 = {}^{\mathrm{t}}xYx$ pour tout $x \in \mathbb{R}^g$, et posons $\psi_Y(x) = \min\limits_{m \in \mathbb{Z}^g} \|x - m\|_Y$. Le **premier minimum** $\lambda_1(Y)$ et le **minimum inhomogène** $\mu(Y)$ de Y sont les réels définis par

$$\lambda_1(Y) = \min_{m \in \mathbb{Z}^g - \{0\}} \|m\|_Y \quad \text{et} \quad \mu(Y) = \max_{x \in \mathbb{R}^g} \psi_Y(x) \quad .$$

Lemme 3.1 : *Soit $Y \in \mathbb{S}_g$. On a l'inégalité $2\mu(Y)\lambda_1(Y^{-1}) \geq 1$.*

Démonstration : Choisissons un $\gamma \in \mathbb{Z}^g$ tel que $\|\gamma\|_{Y^{-1}} = \lambda_1(Y^{-1})$. Les coordonnées de γ sont premières entre elles (par minimalité), donc il existe $m \in \mathbb{Z}^g$ vérifiant une relation de Bézout ${}^{\mathrm{t}}\gamma m = 1$. Posons $x = \dfrac{m}{2}$ et montrons que $2\psi_Y(x)\lambda_1(Y^{-1}) \geq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}^g$, on a

$$1 \leq |1 - 2\,{}^{\mathrm{t}}\gamma n| = 2|{}^{\mathrm{t}}\gamma(x-n)| \leq 2\|\gamma\|_{Y^{-1}}\|x-n\|_Y = 2\lambda_1(Y^{-1})\|x-n\|_Y \quad .$$

D'où le résultat. $\square$

Dans la suite de cette section, on fixe un $Y \in \mathbb{S}_g$ et on note simplement $\| \ \|$ et ψ au lieu de $\| \ \|_Y$ et ψ_Y. Désignons par ν la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^g$, et posons $F = [0;1]^g$.

Lemme 3.2 : *Soit $Y \in \mathbb{S}_g$. On a la minoration suivante :*

$$\int_F \psi(x)^2 \mathrm{d}\nu(x) \geq \frac{\mu(Y)^2}{3} \quad .$$

Démonstration : On prend un $y \in \mathbb{R}^g$ vérifiant $\mu(Y) = \psi(y)$. Soit $x \in \mathbb{R}^g$. Pour m et n dans $\mathbb{Z}^g$, l'identité du parallélogramme donne

$$\begin{aligned} 2\|x-m\|^2 + 2\|x-y-n\|^2 &= \|y-m+n\|^2 + \|2x-y-m-n\|^2 \\ &\geq \psi(y)^2 + \psi(2x-y)^2 \quad . \end{aligned}$$

Il en découle $2\psi(x)^2 + 2\psi(x-y)^2 \geq \mu(Y)^2 + \psi(2x-y)^2$. On conclut en intégrant cette inégalité contre ν et en utilisant la $\mathbb{Z}^g$-périodicité de ψ. $\square$

Pour tout $(t;x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^g$, on pose

$$f_Y(t;x) = \sqrt{\det(Y)} \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp(-\pi t \|x - m\|^2) \quad .$$

Lemme 3.3 : *On a les propriétés suivantes.*
(α) *Soit $x \in \mathbb{R}^g$. L'application $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui à t associe $f_Y(t;x)\exp(\pi t \psi(x)^2)$ est décroissante.*
(β) *Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On a l'estimation $\int_F \ln f_Y(t;x) \mathrm{d}\nu(x) \leq -\frac{g}{2} \ln t$.*

Démonstration : (α) Cette fonction est une somme d'exponentielles décroissantes.

(β) En utilisant l'inégalité de convexité de Jensen, on trouve

$$\begin{aligned} \int_F \ln f_Y(t;x) \mathrm{d}\nu(x) &\leq \ln \int_F f_Y(t;x) \mathrm{d}\nu(x) \\ &= \ln\Big[\sqrt{\det(Y)} \int_{\mathbb{R}^g} \exp(-\pi t \|x\|^2) \mathrm{d}\nu(x)\Big] = -\frac{g}{2} \ln t \quad . \square \end{aligned}$$

Proposition 3.4 : *En posant $\lambda = \min\Big(\lambda_1(Y^{-1}); \sqrt{\frac{\pi}{3g}}\Big)$, on a la majoration*

$$\int_F \ln f_Y(2;x) \mathrm{d}\nu(x) \leq -\frac{\pi}{6\lambda^2} - g \ln \lambda - \frac{g}{2} \ln \frac{6g}{\pi e} \quad .$$

Démonstration : Soit $t \in]0;2]$. Le lemme 3.3.α implique pour tout $x \in F$ l'inégalité

$$\ln f_Y(2;x) \leq \ln f_Y(t;x) - \pi(2-t)\psi(x)^2 \quad .$$

Avec les lemmes 3.3.β, 3.2 et 3.1, on en déduit

$$\begin{aligned} \int_F \ln f_Y(2;x) \mathrm{d}\nu(x) &\leq \int_F \ln f_Y(t;x) \mathrm{d}\nu(x) - \pi(2-t) \int_F \psi(x)^2 \mathrm{d}\nu(x) \\ &\leq -\frac{g}{2} \ln t - \frac{\pi(2-t)}{12\lambda_1(Y^{-1})^2} \end{aligned}$$

On obtient le résultat en choisissant $t = \frac{6g\lambda^2}{\pi}$. $\square$

4 Démonstration du théorème 2.1

Notons $\mathbb{H}_g$ l'espace de Siegel des matrices $\Omega \in \mathrm{M}_g(\mathbb{C})$ symétriques telles que $\mathrm{Im}\Omega$ soit définie positive. À tout $\Omega \in \mathbb{H}_g$ on associe la fonction thêta définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}^g \quad \theta_\Omega(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(i\pi {}^{\mathrm{t}}n\Omega n + 2i\pi {}^{\mathrm{t}}nz) \quad .$$

Soit $(A;L)$ une $\mathbb{C}$-variété abélienne de dimension g, principalement polarisée. Fixons un $\Omega \in \mathbb{H}_g$ tel que $A(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g)$, que L soit induite par $\Theta = \mathrm{div}(\theta_\Omega)$, et que Ω soit réduite au sens de Siegel (voir §V.4 de [10]).

En posant $Y = \mathrm{Im}\Omega$, on a en particulier $\lambda_1(Y)^2 \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Désignons par ν_1 la mesure de Haar sur $A(\mathbb{C})$ et par ν la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^g$. Posons $\mathcal{L} = \mathcal{O}_A(\Theta)$ et notons s la section globale de $\mathcal{L}$ définie par Θ. On munit $\mathcal{L}$ de la métrique $\| \ \|$ définie par

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}^g \quad \|s\|(z) = \sqrt[4]{\det(Y)}\exp(-\pi {}^{\mathrm{t}}yY^{-1}y)|\theta_\Omega(z)| \quad .$$

C'est une métrique du cube sur $\mathcal{L}$ (voir §3 de [13]) et on a

$$\ln \int_{A(\mathbb{C})} \|s\|^2 \mathrm{d}\nu_1 = -\frac{g}{2}\ln 2 \quad .$$

Maintenant, majorons le terme $\displaystyle\int_{A(\mathbb{C})} \ln\|s\|\mathrm{d}\nu_1$. Posons $F = [0;1]^g$. En utilisant l'inégalité de Jensen puis la formule de Parseval, on obtient pour tout $y \in F$:

$$\begin{aligned}
\int_F \ln\|s\|^2(x+\Omega y)\mathrm{d}\nu(x) &\leq \ln \int_F \|s\|^2(x+\Omega y)\mathrm{d}\nu(x) \\
&= \ln\Big[\sqrt{\det(Y)} \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp[-2\pi {}^{\mathrm{t}}(y+n)Y(y+n)]\Big] \\
&= \ln f_Y(2;y) \quad .
\end{aligned}$$

On pose $\lambda = \min\Big(\lambda_1(Y^{-1}); \sqrt{\dfrac{\pi}{3g}}\Big)$. À l'aide de la proposition 3.4, on en déduit

$$\begin{aligned}
2I(A;L) &\geq -\frac{g}{2}\ln 2 - \int_F \ln f_Y(2;y)\mathrm{d}\nu(y) \\
&\geq \frac{\pi}{6\lambda^2} + g\ln\lambda + \frac{g}{2}\ln\frac{3g}{\pi e} \quad .
\end{aligned}$$

On conclut en appliquant le lemme 4.1 ci-dessous.

Lemme 4.1 : *En posant* $\rho = \min\Big(\rho(A;L); \sqrt{\dfrac{\pi}{3g}}\Big)$, *on a l'égalité* $\rho = \lambda$.

Démonstration : Identifions T_A à $\mathbb{C}^g$ et Γ_A à $\mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g$. La forme de Riemann H_L vérifie alors

$$\forall \gamma = m + \Omega n \in \Gamma_A \quad H_L(\gamma;\gamma) = {}^{\mathrm{t}}\overline{\gamma}Y^{-1}\gamma = {}^{\mathrm{t}}(m+Xn)Y^{-1}(m+Xn) + {}^{\mathrm{t}}nYn \quad .$$

Si $g = 1$, on vérifie aisément que $\rho(A;L) = \dfrac{1}{\sqrt{Y}} = \lambda_1(Y^{-1})$.

Supposons maintenant $g \geq 2$. Soit $\gamma = m + \Omega n \in \Gamma_A - \{0\}$. Si $n \neq 0$ on a $H(\gamma;\gamma) \geq {}^{\mathrm{t}}nYn \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \geq \dfrac{\pi}{3g}$, et si $n = 0$ on a $H(\gamma;\gamma) = {}^{\mathrm{t}}mY^{-1}m \geq \lambda_1(Y^{-1})^2$. D'où $\rho \geq \lambda$.

De même, pour tout $m' \in \mathbb{Z}^g - \{0\}$, on a $\|m'\|^2_{Y^{-1}} = H(m';m') \geq \rho(A;L)^2$. Donc $\lambda \geq \rho$. $\square$

Références

[1] *C. Birkenhake, H. Lange :* Complex abelian varieties (second edition). Grundlehren der math. Wissenschaften **302** (2004).

[2] *J.-B. Bost :* Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz). Astérisque **237** (1996), 115-161.

[3] *J.-B. Bost :* Arakelov geometry of abelian varieties. Preprint of the Max-Planck-Institut für Mathematik **51** (1996).

[4] *S. David, P. Philippon :* Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes II. Commentarii Math. Helvetici **77** (2002), 639-700.

[5] *G. Faltings :* Calculus on arithmetic surfaces. Annals of Math. **119** (1984), 387-424.

[6] *É. Gaudron :* Formes linéaires de logarithmes effectives sur les variétés abéliennes. Annales Scientifiques de l'ENS **39** (2006), 699-773.

[7] *É. Gaudron, G. Rémond :* Théorème des périodes et degrés minimaux d'isogénies. Prépublication (2011) ; arXiv :1105.1230.

[8] *P. Graftieaux :* Formals groups and the isogeny theorem. Duke Math. Journal **106** (2001), 81-121.

[9] *P.M. Gruber, C.G. Lekkerkerker.* Geometry of numbers (second edition). North-Holland Math. Library **37** (1987).

[10] *J. Igusa :* Theta functions. Grundlehren der math. Wissenschaften **194** (1972).

[11] *D. Masser :* Small values of heights on families of abelian varieties. Lecture Notes in Math. **1290** (1987), 109-148.

[12] *D. Masser, G. Wüstholz :* Periods and minimal abelian subvarieties. Annals of Math. **137** (1993), 407-458.

[13] *L. Moret-Bailly :* Sur l'équation fonctionnelle de la fonction thêta de Riemann. Compositio Math. **75** (1990), 203-217.

[14] *F. Pazuki :* Theta height and Faltings height. Bulletin de la SMF **140** (2012), *à paraître.*

Pascal Autissier. I.M.B., université Bordeaux I, 351, cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France.

pascal.autissier@math.u-bordeaux1.fr